Φασματική Ανάλυση Του Διανυσματικού Τελεστή Laplace Σε Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων

Μαρία Δ. Αρμάγου

Εκπαιδευτικός Δ.Ε. και Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

m_armagou@yahoo.gr, std134821@ac.eap.gr

Φωτεινή Καριώτου

Επίκουρη καθηγήτρια ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

kariotou@eap.gr

***Περίληψη* – Αρκετές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες συναντώνται σε σημαντικά μαθηματικά μοντέλα της Φυσικής, περιέχουν τον τελεστή Laplace. Συχνά τα ζητούμενα πεδία είναι διανυσματικά και ο προσδιορισμός τους είναι εν γένει περίπλοκος. Η εύρεση βάσης ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή Laplace, ορθογώνιων επί της φραγμένης επιφάνειας καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων, συνεισφέρει στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Στην παρούσα μελέτη επιχειρείται η εφαρμογή μιας μεθόδου, ανάλογης με αυτή που εφάρμοσαν οι Morse και Feshbach στη διανυσματική εξίσωση Helmholtz. Η μέθοδος εφαρμόζεται στα έξι από τα έντεκα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, στα οποία η βαθμωτή εξίσωση Laplace λύνεται με χωρισμό μεταβλητών. Για την παραγωγή των πεδίων της βάσης απαιτούνται βαθμωτές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, η μέθοδος χτίζεται πάνω σε μια ενδεικτική επιλογή βαθμωτών ιδιοσυναρτήσεων.**

Λέξεις-Κλειδιά: Διανυσματική εξίσωση Laplace, διανυσματικές αρμονικές, διανυσματικές ιδιοσυναρτήσεις.

I. Εισαγωγη

Με τον όρο φασματική ανάλυση του διανυσματικού τελεστή Laplace, εννοούμε τον προσδιορισμό διανυσματικών ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών, οι οποίες είναι απαραίτητες στην αναλυτική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Οι P.M. Morse και H. Feshbach (1953) αποτύπωσαν μια μέθοδο εύρεσης τριών γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Αναγκαία συνθήκη, για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι ο ένας από τους μετρικούς συντελεστές του συστήματος συντεταγμένων να ισούται με τη μονάδα και το πηλίκο των δύο άλλων να είναι ανεξάρτητο από τη μεταβλητή, η οποία αντιστοιχεί στον προηγούμενο συντελεστή. Στη συνέχεια προσδιόρισαν τη μορφή των τριών γραμμικά ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων **L**, **M** και **N** τα οποία δίνονται από τις σχέσεις $\mathbf{L}=\nabla\varphi$, $\mathbf{M}=\nabla\times(\hat{\mathbf{a}}_1 w\psi)$ και $\mathbf{N}=\frac{1}{k}\nabla\times[\nabla\times(\hat{\mathbf{a}}_1 w\chi)]$, όπου οι φ, χ και ψ είναι λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz και οι w κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις.

Στη παρούσα εργασία αποδεικνύεται ότι παρόμοια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στη διανυσματική εξίσωση Laplace, υπό τις ίδιες προϋποθέσεις. Έτσι όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι ένα από τα: καρτεσιανό, κυκλικό κυλινδρικό, ελλειπτικό κυλινδρικό, παραβολικό κυλινδρικό, σφαιρικό ή κωνικοσφαιρικό, ορίζεται η γενική μορφή των διανυσμάτων της βάσης του χώρου των λύσεων. Το πεδίο **N** είναι αστρόβιλο και σωληνοειδές και ισούται με $\mathbf{N}=\nabla\varphi$. Το πεδίο **M** είναι σωληνοειδές χωρίς όμως να είναι αστρόβιλο και δίνεται από τη σχέση $\mathbf{M}=\nabla\times(\hat{\mathbf{a}}_1 w\psi)$. Το τρίτο πεδίο το οποίο συμβολίζουμε με **G** προκύπτει από την αστρόβιλη και σωληνοειδή λύση με τέτοιο τρόπο ώστε να χάσει και τις δυο αυτές ιδιότητες. Τέλος, προσδιορίζουμε ορθογώνια βάση επιφανειακών ιδιοσυναρτήσεων επί ορισμένης επιφάνειας του συστήματος συντεταγμένων, η οποία απαιτείται στην εφαρμογή αυτών των συνθηκών πάνω στην εν λόγω επιφάνεια. Επισημαίνουμε ότι η μέθοδος έχει εφαρμοστεί ήδη από τον Hansen το 1934 και έχει παράξει τις ευρέως χρησιμοποιούμενες σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Ωστόσο, πέρα από το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει-όσο γνωρίζουμε- εφαρμογή της μεθόδου και αντίστοιχα αποτελέσματα σε άλλα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

Η μέθοδος που παρουσιάζουμε αφορά σε τρία στάδια:
α) Επίλυση βαθμωτής εξίσωσης Laplace,
β) Κατασκευή διανυσματικών ιδιοσυναρτήσεων και
γ) Εύρεση κατάλληλων επιφανειακών διανυσματικών αρμονικών ορθογώνιων μεταξύ τους με βάση το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο πάνω στην επιφάνεια.

II. Μεθοδολογια

A. *Επίλυση βαθμωτής εξίσωσης Laplace*

Αν υποθέσουμε ότι $h_1=1$ και το πηλίκο $\frac{h_2}{h_3}$ είναι ανεξάρτητο από το ξ_1 και θεωρήσουμε συναρτήσεις f_1 και g_1 τέτοιες ώστε το $h_2h_3=f_1(\xi_1)g_1(\xi_2,\xi_3)$ εφαρμόζοντας την τυπική διαδικασία χωρισμού μεταβλητών, η εξίσωση Laplace είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\frac{d}{d\xi_1}\left(f_1(\xi_1)U_1'(\xi_1)\right)-\lambda U_1(\xi_1)=0 \tag{1}$$

$$-\frac{1}{U_2(\xi_2)g_1(\xi_2,\xi_3)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\cdot U_2'(\xi_2)\right)-\frac{1}{U_3(\xi_3)g_1(\xi_2,\xi_3)}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\cdot U_3'(\xi_3)\right)=\lambda \tag{2}$$

όπου $u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=U_1(\xi_1)\cdot U_2(\xi_2)\cdot U_3(\xi_3)$.

Για την επίλυση της (1) μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν το σύστημα είναι το σφαιρικό ή το κωνικοσφαιρικό, τότε η συντεταγμένη επιφάνεια της σφαίρας χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη. Σε αυτή την περίπτωση η (1) για λ=p(p+1) έχει λύσεις $U_{1,p}(\xi_1)=\xi_1^p$, $U_{1,p}(\xi_1)=\xi_1^{-p-1}$. Η πρώτη από τις προηγούμενες λύσεις είναι ομαλή στο εσωτερικό της σφαίρας και η δεύτερη έξω από αυτή.

Αντίστοιχα, στα υπόλοιπα συστήματα που μελετούμε, δεν υπάρχει ενιαία ομαλή φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια και οι λύσεις της εξίσωσης ποικίλουν. Έχουμε δηλαδή:

Αν λ=0: $U_{1,p}(\xi_1)=\xi_1$ ή $U_{1,p}(\xi_1)=1$

Αν λ=-p^2: $U_{1,p}(\xi_1)=\sin(p\xi_1)$ ή $U_{1,p}(\xi_1)=\cos(p\xi_1)$

Αν λ=p^2: $U_{1,p}(\xi_1)=e^{|p|\xi_1}$ ή $U_{1,p}(\xi_1)=e^{-|p|\xi_1}$

Από την εξίσωση (2) προκύπτουν λύσεις που περιέχουν ειδικές συναρτήσεις Bessel, Mathieu, Weber, Legendre ή τέλος Lamé.

Συνεπώς η λύση της βαθμωτής εξίσωσης Laplace μπορεί να είναι της μορφής:

α) για συστήματα με φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια:

$$u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=Y_p(\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{cases}\xi_1^p & \text{μέσα στη σφαίρα}\\ \xi_1^{-p-1} & \text{έξω από τη σφαίρα}\end{cases} \quad (3)$$

β) για συστήματα χωρίς φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια:

Αν λ=0: $u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=Y_p(\xi_2,\xi_3)$ ή $Y_p(\xi_2,\xi_3)\cdot\xi_1$

Αν λ=-p^2:

$$u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=Y_p(\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{cases}\sin(p\xi_1), \text{περιττή ως προς } \xi_1\\ \cos(p\xi_1), \text{άρτια ως προς } \xi_1\end{cases}$$

Αν λ=p^2:

$$u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=Y_p(\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{cases}e^{-|p|\xi_1} & \text{πάνω από το } \xi_1=0\\ e^{|p|\xi_1} & \text{κάτω από το } \xi_1=0\end{cases} \quad (4)$$

όπου $Y_p(\xi_2,\xi_3)=U_{2,p}(\xi_2)\cdot U_{3,p}(\xi_3)$.

B. *Κατασκευή διανυσματικών ιδιοσυναρτήσεων*

1) Συστήματα με φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια:

Το διανυσματικό πεδίο τύπου **N** είναι αστρόβιλο και σωληνοειδές και ισούται με την κλίση της βαθμωτής λύσης (3). Συνεπώς:

$$\mathbf{N}_p^{(i)}=\left[Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)(p+1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\xi_1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]\xi_1^p$$

$$\mathbf{N}_p^{(e)}=\left[-pY_{p-1}(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\xi_1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_{p-1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_{p-1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]\xi_1^{-p-1}$$

Το διανυσματικό πεδίο τύπου **M** είναι σωληνοειδές χωρίς όμως να είναι αστρόβιλο και προκύπτει από τον στροβιλισμό $\nabla\times(\hat{\mathbf{a}}_1 w\psi)$. Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{M}_p^{(i)}=\left[\frac{\xi_1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{\xi_1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]\xi_1^p$$

$$\mathbf{M}_p^{(e)}=\left[\frac{\xi_1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{\xi_1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]\xi_1^{-p-1}$$

Τέλος, η κατασκευή των διανυσματικών πεδίων τύπου **G** βασίζεται σε μια ιδέα του Hansen (1934). Τα πεδία **G** προκύπτουν από τα **N** διασταυρώνοντας τις εξαρτήσεις από τη μεταβλητή ξ_1. Αυτά τα πεδία είναι μη αστρόβιλες και μη σωληνοειδείς λύσεις της διανυσματικής εξίσωσης Laplace και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{G}_p^{(i)}=\left[-pY_{p-1}(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\xi_1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_{p-1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_{p-1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]\xi_1^p$$

$$\mathbf{G}_p^{(e)}=\left[Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)(p+1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\xi_1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_{p+1}(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]\xi_1^{-p-1}$$

2) Συστήματα χωρίς φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια:

Αν οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε λ=p^2 τότε, τα διανυσματικά πεδία που προκύπτουν είναι:

Τα αστρόβιλα και σωληνοειδή πεδία τύπου **N**:

$$\mathbf{N}_p^{(i)}=\left[|p|Y_p(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]e^{|p|\xi_1}$$

$$\mathbf{N}_p^{(e)}=\left[-|p|Y_p(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]e^{-|p|\xi_1}$$

Τα σωληνοειδή και μη αστρόβιλα πεδία τύπου **M**:

$$\mathbf{M}_p^{(i)}=\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]e^{|p|\xi_1}$$

$$\mathbf{M}_p^{(e)}=\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]e^{-|p|\xi_1}$$

Τα μη σωληνοειδή και μη αστρόβιλα πεδία τύπο **G**:

$$\mathbf{G}_p^{(i)}=\left[-|p|Y_p(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]e^{|p|\xi_1}$$

$$\mathbf{G}_p^{(e)}=\left[|p|Y_p(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right)\right]e^{-|p|\xi_1}$$

Αντίστοιχα αν λ=-p^2 έχουμε:

Τα αστρόβιλα και σωληνοειδή πεδία τύπου **N**:

$$\mathbf{N}_p^{(i)}=pY_p(\xi_2,\xi_3)\cos(p\xi_1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\sin(p\xi_1)}{h_2}\left[\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right]$$

$$\mathbf{N}_p^{(e)}=-pY_p(\xi_2,\xi_3)\sin(p\xi_1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\cos(p\xi_1)}{h_2}\left[\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right]$$

Τα σωληνοειδή και μη αστρόβιλα πεδία τύπου **M**:

$$\mathbf{M}_p^{(i)}=\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]\sin(p\xi_1)$$

$$\mathbf{M}_p^{(e)}=\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_2-\frac{1}{h_2}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_3\right]\cos(p\xi_1)$$

Τα μη σωληνοειδή και μη αστρόβιλα πεδία τύπο **G**:

$$\mathbf{G}_p^{(i)}=-pY_p(\xi_2,\xi_3)\cos(p\xi_1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\sin(p\xi_1)}{h_2}\left[\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right]$$

$$\mathbf{G}_p^{(e)}=pY_p(\xi_2,\xi_3)\sin(p\xi_1)\hat{\mathbf{a}}_1+\frac{\cos(p\xi_1)}{h_2}\left[\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right]$$

C. *Κατασκευή επιφανειακών διανυσματικών αρμονικών*

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε, τόσο στα συστήματα με φραγμένη συντεταγμένη επιφάνεια, όσο και σε αυτά που καμία συντεταγμένη επιφάνεια δεν είναι φραγμένη και οι συνοριακές συνθήκες επιβάλουν λ=p^2, τα διανυσματικά πεδία **N**, **M** και **G** εξαρτώνται από τα:

$$\mathbf{P_p}(\xi_2,\xi_3)=Y_p(\xi_2,\xi_3)\hat{\mathbf{a}}_1$$

$$\mathbf{B_p}(\xi_2,\xi_3)=\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3 \quad \text{και}$$

$$\mathbf{C_p}(\xi_2,\xi_3)=-\hat{\mathbf{a}}_1\times\left[\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2}\hat{\mathbf{a}}_2+\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial Y_p(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_3}\hat{\mathbf{a}}_3\right]$$

που δεν παρουσιάζουν εξάρτηση από τη μεταβλητή ξ_1.

Τα προηγούμενα πεδία αποτελούν ένα σύνολο επιφανειακών διανυσματικών αρμονικών, οι οποίες είναι ορθογώνιες με βάση το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο πάνω στην επιφάνεια ξ_1.

III. Επιλεγμενα Αποτελεσματα

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο στα συστήματα που ικανοποιούν τις αναγκαίες προϋποθέσεις έχουμε:

A. Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ I

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**
$\mathbf{N}_n^{(i)m}(x,y,z)=\left(\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}+Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\sqrt{n^2+m^2}\,\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot e^{z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{N}_n^{(i)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nm\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})\cdot e^{z\sqrt{n^2+m^2}}+\sqrt{n^2+m^2}\,\cdot\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})\cdot e^{z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{N}_n^{(e)m}(x,y,z)=\left(\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}-Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\sqrt{n^2+m^2}\,\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{N}_n^{(e)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nm\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})\cdot e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}-\sqrt{n^2+m^2}\,\cdot\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})\cdot e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}$
Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**
$\mathbf{M}_n^{(i)m}(x,y,z)=\left(\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot e^{z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{M}_n^{(i)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nme^{z\sqrt{n^2+m^2}}\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{M}_n^{(e)m}(x,y,z)=\left(\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{M}_n^{(e)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nme^{-z\sqrt{n^2+m^2}}\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$
Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**
$\mathbf{G}_n^{(i)m}(x,y,z)=e^{z\sqrt{n^2+m^2}}\cdot\left[\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\cdot\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\cdot\hat{\mathbf{j}}-Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\sqrt{n^2+m^2}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right]$
$\mathbf{G}_n^{(i)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nme^{z\sqrt{n^2+m^2}}\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})-\sqrt{n^2+m^2}\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})e^{z\sqrt{n^2+m^2}}$
$\mathbf{G}_n^{(e)m}(x,y,z)=e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}\cdot\left[\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\cdot\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\cdot\hat{\mathbf{j}}+Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\sqrt{n^2+m^2}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right]$
$\mathbf{G}_n^{(e)m}(x,y,z)=\sqrt{2}nme^{-z\sqrt{n^2+m^2}}\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})+\sqrt{n^2+m^2}\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}$

$$Y_{ns}^{md}(\hat{\mathbf{r}})=\begin{cases}\cos(nx), s=e\\ \sin(nx), s=o\end{cases}\cdot\begin{cases}\cos(my), d=e\\ \sin(my), d=o\end{cases}\ ,\ \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{\sqrt{2}nm}\left[\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{n,s}^{m,d}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right],\ \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=-\hat{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2}nm}\times\left(\frac{\partial Y_{ns}^{md}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial x}\cdot\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial Y_{ns}^{md}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial y}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)$$

B. Κυκλικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ II

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**
$\mathbf{N}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}+Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\lvert p\rvert\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\right]\cdot e^{\lvert p\rvert z}$
$\mathbf{N}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})e^{\lvert p\rvert z}+\lvert p\rvert\cdot\mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})e^{\lvert p\rvert z}$
$\mathbf{N}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}-Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\lvert p\rvert\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\right]\cdot e^{-\lvert p\rvert z}$
$\mathbf{N}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})e^{-\lvert p\rvert z}-\lvert p\rvert\cdot\mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})e^{-\lvert p\rvert z}$
Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**
$\mathbf{M}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\frac{1}{r}\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot e^{\lvert p\rvert z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}-\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\cdot e^{\lvert p\rvert z}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}$
$\mathbf{M}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert e^{\lvert p\rvert z}\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{M}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\frac{1}{r}\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot e^{-\lvert p\rvert z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}-\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\cdot e^{-\lvert p\rvert z}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}$
$\mathbf{M}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert e^{-\lvert p\rvert z}\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$
Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**
$\mathbf{G}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}-Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\lvert p\rvert\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\right]\cdot e^{\lvert p\rvert z}$
$\mathbf{G}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert\cdot e^{\lvert p\rvert z}\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})-\lvert p\rvert\cdot e^{\lvert p\rvert z}\cdot\mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{G}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}+Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\lvert p\rvert\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\right]\cdot e^{-\lvert p\rvert z}$
$\mathbf{G}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\lvert p\rvert\cdot e^{-\lvert p\rvert z}\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})+\lvert p\rvert\cdot e^{-\lvert p\rvert z}\cdot\mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$

$$Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})=\begin{cases}J_m(pr)\ \ ,d=e\\ N_m(pr)\ \ ,d=o\end{cases}\cdot\begin{cases}\cos(m\varphi)\ \ ,s=e\\ \sin(m\varphi)\ \ ,s=o\end{cases}\ ,\ \mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{\lvert p\rvert}\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right],\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=-\frac{1}{\lvert p\rvert}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\times\left[\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial Y_{p,d}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right]$$

C. Ελλειπτικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ III

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**
$\mathbf{N}_{k,q}^{(i)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{d\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)+\lvert k\rvert Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]e^{\lvert k\rvert z}$
$\mathbf{N}_{k,q}^{(i)}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{\lvert k\rvert z}\mathbf{B}_q^m(\hat{\mathbf{r}})+\lvert k\rvert\cdot e^{\lvert k\rvert z}\mathbf{P}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{N}_{k,q}^{(e)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{d\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)-\lvert k\rvert Y_{q,x}^{m,q}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]e^{-\lvert k\rvert z}$
$\mathbf{N}_{k,q}^{(e)m}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{-\lvert k\rvert z}\mathbf{B}_q^m(\hat{\mathbf{r}})-\lvert k\rvert\cdot e^{-\lvert k\rvert z}\mathbf{P}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$
Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**
$\mathbf{M}_{k,q}^{(i)}(\mathbf{r})=\frac{e^{\lvert k\rvert z}}{d\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}-\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)$
$\mathbf{M}_{k,q}^{(i)}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{C}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{M}_{k,q}^{(e)}(\mathbf{r})=\frac{e^{-\lvert k\rvert z}}{d\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}-\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)$
$\mathbf{M}_{k,q}^{(e)}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{-\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{C}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$
Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**
$\mathbf{G}_{k,q}^{(i)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{d\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)-\lvert k\rvert Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]e^{\lvert k\rvert z}$
$\mathbf{G}_{k,q}^{(i)m}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{B}_q^m(\hat{\mathbf{r}})-\lvert k\rvert e^{\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{P}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$
$\mathbf{G}_{k,q}^{(e)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{d\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)+\lvert k\rvert Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\cdot\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]e^{-\lvert k\rvert z}$
$\mathbf{G}_{k,q}^{(e)m}(\mathbf{r})=\sqrt{2q}\cdot e^{-\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{B}_q^m(\hat{\mathbf{r}})+\lvert k\rvert e^{-\lvert k\rvert z}\cdot\mathbf{P}_q^m(\hat{\mathbf{r}})$

$$Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})=\begin{cases}ce_m(\varphi,q)\ \ ,x=e\\ se_m(\varphi,q)\ \ ,x=o\end{cases}\cdot\begin{cases}Ce_m(\mu,q)\ \ ,s=e\\ Se_m(\mu,q)\ \ ,s=o\end{cases}\ ,\ \mathbf{P}_q^m(\hat{\mathbf{r}})=Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B}_q^m(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{d\cdot\sqrt{2q}\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}\right)$$

$$\mathbf{C}_q^m(\hat{\mathbf{r}})=-\frac{1}{d\sqrt{2q}\cdot\sqrt{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}\times\left(\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}+\frac{\partial Y_{q,x}^{m,s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}\right)$$

D. Παραβολικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**
$\mathbf{N}_q^{(i)}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left(\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_{v}\right)+\lvert q\rvert Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]\cdot e^{\lvert q\rvert z}$
$\mathbf{N}_q^{(i)}(\mathbf{r})=\lvert q\rvert\mathbf{B}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{\lvert q\rvert z}+\lvert q\rvert\cdot\mathbf{P}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{\lvert q\rvert z}$
$\mathbf{N}_q^{(e)}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left(\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\mu}\hat{\mathbf{a}}_{\mu}+\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_{v}\right)-\lvert q\rvert Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_{z}\right]\cdot e^{-\lvert q\rvert z}$
$\mathbf{N}_q^{(e)}(\mathbf{r})=\lvert q\rvert\mathbf{B}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{-\lvert q\rvert z}-\lvert q\rvert\cdot\mathbf{P}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{-\lvert q\rvert z}$
Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**

$$\mathbf{M}_q^{(\mathbf{i})}(\mathbf{r})=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left[\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}e^{|q|z}\hat{\mathbf{a}}_\mu-\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}e^{|q|z}\hat{\mathbf{a}}_v\right]$$

$$\mathbf{M}_q^{(\mathbf{i})}(\mathbf{r})=|q|e^{|q|z}\mathbf{C}_q(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{M}_q^{(\mathbf{e})}(\mathbf{r})=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left[\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}e^{-|q|z}\hat{\mathbf{a}}_\mu-\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}e^{-|q|z}\hat{\mathbf{a}}_v\right]$$

$$\mathbf{M}_q^{(\mathbf{e})}(\mathbf{r})=|q|e^{-|q|z}\mathbf{C}_q(\hat{\mathbf{r}})$$

Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**

$$\mathbf{G}_q^{(\mathbf{i})}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left(\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}\hat{\mathbf{a}}_\mu+\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_v\right)-|q|Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_z\right]\cdot e^{|q|z}$$

$$\mathbf{G}_q^{(\mathbf{i})}(\mathbf{r})=|q|\mathbf{B}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{|q|z}-|q|\cdot\mathbf{P}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{|q|z}$$

$$\mathbf{G}_q^{(\mathbf{e})}(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\left(\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}\hat{\mathbf{a}}_\mu+\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_v\right)+|q|Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_z\right]\cdot e^{-|q|z}$$

$$\mathbf{G}_q^{(\mathbf{e})}(\mathbf{r})=|q|\mathbf{B}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{-|q|z}+|q|\cdot\mathbf{P}_q(\hat{\mathbf{r}})e^{-|q|z}$$

$$Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})=\begin{cases}\sqrt{\mu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{|q|\mu^2}{2}\right), & s=e\\ \sqrt{\mu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{|q|\mu^2}{2}\right), & s=o\end{cases}\cdot\begin{cases}\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{|q|\nu^2}{2}\right), & d=e\\ \sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{|q|\nu^2}{2}\right), & d=o\end{cases}\ ,\ \mathbf{P}_q(\hat{\mathbf{r}})=Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{B}_q(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{|q|}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}\hat{\mathbf{a}}_\mu+\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_v\right)$$

$$\mathbf{C}_q(\hat{\mathbf{r}})=-\frac{1}{|q|}\hat{\mathbf{a}}_z\times\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial v}\hat{\mathbf{a}}_v+\frac{1}{\sqrt{\mu^2+v^2}}\frac{\partial Y_{q,d}^{s}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \mu}\hat{\mathbf{a}}_\mu\right]$$

E. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ V

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**

$$\mathbf{N}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}(n+1)r^nY_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^n\left[\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}+\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\right]$$

$$\mathbf{N}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=(n+1)r^n\mathbf{P}_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^n\sqrt{(n+1)(n+2)}\mathbf{B}_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{N}_n^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=-n\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}r^{-n-1}Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^{-n-1}\left[\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}+\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\right]$$

$$\mathbf{N}_n^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=-n\cdot r^{-n-1}\mathbf{P}_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^{-n-1}\sqrt{n(n-1)}\mathbf{B}_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**

$$\mathbf{M}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\frac{r^n}{\sin\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta\frac{\partial Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}-r^n\hat{\mathbf{a}}_\varphi\frac{\partial Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}$$

$$\mathbf{M}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\sqrt{n(n+1)}r^n\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{M}_n^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=\frac{r^{-n-1}}{\sin\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta\frac{\partial Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}-r^{-n-1}\hat{\mathbf{a}}_\varphi\frac{\partial Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}$$

$$\mathbf{M}_n^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=\sqrt{n(n+1)}r^{-n-1}\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**

$$\mathbf{G}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=r^{2n+1}\left[-\frac{1}{r^{n+1}}n\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})+\frac{1}{r^{n+1}}\left(\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}+\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$\mathbf{G}_n^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=-nr^n\mathbf{P}_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^n\sqrt{n(n-1)}\mathbf{B}_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{G}_n^{(e)m}(\mathbf{r})=r^{-2n-1}\left[r^n(n+1)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^n\left(\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}+\hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$\mathbf{G}_n^{(e)m}(\mathbf{r})=(n+1)r^{-n-1}\mathbf{P}_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^{-n-1}\sqrt{(n+1)(n+2)}\mathbf{B}_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})=P_n^m(\cos\theta)\cdot\begin{cases}\cos m\varphi, s=e\\ \sin m\varphi, s=o\end{cases}\ ,\ \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left[\frac{\partial Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_\varphi\right]$$

$$\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})=-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}\times\left[\frac{\partial Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_\varphi\right]$$

F. Κωνικοσφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

ΠΙΝΑΚΑΣ VI

ΚΩΝΙΚΟΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Αστρόβιλο και σωληνοειδές πεδίο **N**

$$\mathbf{N}_p^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\left[(p+1)Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r+\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^p$$

$$\mathbf{N}_p^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=(p+1)r^p\mathbf{P}_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})+r^p\sqrt{(p+1)(p+2)}\mathbf{B}_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{N}_p^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=\left[-pY_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r+\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^{-p-1}$$

$$\mathbf{N}_p^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=-p\mathbf{P}_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^{-p-1}+\sqrt{p(p-1)}\mathbf{B}_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^{-p-1}$$

Σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο πεδίο **M**

$$\mathbf{M}_p^{(i)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\theta-\frac{\sqrt{(c^2-\theta^2)(\theta^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^p$$

$$\mathbf{M}_p^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\sqrt{p(p+1)}r^p\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{M}_p^{(e)m}(\mathbf{r})=\left[\frac{\sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\theta-\frac{\sqrt{(c^2-\theta^2)(\theta^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^{-p-1}$$

$$\mathbf{M}_p^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=\sqrt{p(p+1)}r^{-p-1}\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές πεδίο **G**

$$\mathbf{G}_p^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=\left[-pY_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r+\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^p$$

$$\mathbf{G}_p^{(\mathbf{i})m}(\mathbf{r})=-p\mathbf{P}_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^p+\sqrt{p(p-1)}\mathbf{B}_{p-1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^p$$

$$\mathbf{G}_p^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=\left[(p+1)Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r+\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]r^{-p-1}$$

$$\mathbf{G}_p^{(\mathbf{e})m}(\mathbf{r})=(p+1)\mathbf{P}_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^{-p-1}+\sqrt{(p+1)(p+2)}\mathbf{B}_{p+1}^m(\hat{\mathbf{r}})r^{-p-1}$$

$$Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})=E_p^m(\theta)\cdot E_p^m(\lambda)\ ,\ \mathbf{P}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\mathbf{B}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\left[\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]$$

$$\mathbf{C}_p^m(\hat{\mathbf{r}})=-\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\hat{\mathbf{a}}_r\times\left[\frac{\sqrt{(\theta^2-c^2)(b^2-\theta^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta+\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-b^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial Y_p^m(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{a}}_\lambda\right]$$

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μια μέθοδος προσδιορισμού βάσης του χώρου των λύσεων της διανυσματικής εξίσωσης Laplace σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε συγκεκριμένα συστήματα όπου ο προσδιορισμός της βάσης είναι σημαντικός για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για να είναι χρήσιμη η βάση σε φυσικές εφαρμογές, επιλέχθηκε από τα τρία διανυσματικά πεδία το ένα να είναι αστρόβιλο και σωληνοειδές, το δεύτερο να είναι σωληνοειδές αλλά όχι αστρόβιλο, ενώ το τρίτο πεδίο να μην είναι ούτε αστρόβιλο, ούτε σωληνοειδές.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barrera, R.G., Estevez, G.A & Giraldo, J.(1985). Vector Spherical Harmonics and their Application to Magnetostatics. *European Journal of Physics* 6, 287-294.

Dassios, G. (2012). *Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge: University Press.

Fukushima T. (2014). Prolate Spheroidal Harmonic Expansion of Gravitational Field, *The Astronomical Journal*, 147-152.

Hansen, W.W. (1934). A New Type of Expansion in Radiation Problems. *Physical Review, Vol 47*, 139-143.

Hodson, E.W. (2011). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge: University Press.

Lowes, F.J. &. Winch. D.E. (2012). Orthogonality of harmonic potentials and fields in spheroidal and ellipsoidal coordinates: application to geomagnetism and geodesy. *Geophysical Journal International*, 191, 491–507.

Moon P. & Spencer D.E. (1971). *Field Theory Handbook Including Coordinate Systems Differential Equations and Their Solutions*. New York: Springer-Verlag.

Morse, P.M. & Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, Vol. I,II, first ed. New York: McGraw-Hill Book Company.
Temme, M. N. (1996). *Special Functions an Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. New York: J. Wiley & Sons Inc.
Wang Z.X. & Guo D.R. (2010). *Special Functions*. Singapore: World Scientific Publications.