

Αριθμητική Επίλυση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών με τη Μέθοδο των Ροπών

Παναγιώτης Τσοκανάς

Μαθηματικός Δ.Ε. και Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

ptsokana@sch.gr, std123482@ac.eap.gr

Νικόλαος Τσίτσας

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος
Πληροφορικής ΑΠΘ και Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ
ΕΑΠ

ntsitsas@csd.auth.gr

Περίληψη – Στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη της μεθόδου των ροπών σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα συνοριακών τιμών και παρουσιάζονται σχετικές εφαρμογές.

Λέξεις-Κλειδιά: Μέθοδος των Ροπών, ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα συνοριακών τιμών, σημειακή προσαρμογή, μέθοδος Galerkin, ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει με απλό και κατανοητό τρόπο, τη Μέθοδο των Ροπών. Με τη συγκεκριμένη μέθοδο, πραγματοποιείται η αριθμητική επίλυση αρκετών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών, γίνεται χρήση υπολογιστή με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού Mathematica. Μέσω κατάλληλων γραφημάτων, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της Μεθόδου των Ροπών, με την ακριβή λύση, ή με άλλες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης του αντίστοιχου προβλήματος

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα συνοριακών τιμών, δεν είναι εύκολο να επιλυθούν αναλυτικά (σε κλειστή μορφή). Για αυτόν τον λόγο, χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Μία διαδεδομένη μέθοδος, είναι η Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments: MoM), της οποίας η πατρότητα αποδίδεται στον Harrington (Harrington, 1993).

Με την MoM, μετατρέπονται οι ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο στη συνέχεια λύνεται με την βοήθεια υπολογιστή.

A. Η μέθοδος των ροπών

Υποθέτουμε ότι έχουμε να λύσουμε την μη ομογενή εξίσωση:

$$\mathbf{L}(f) = g \quad (1)$$

όπου \mathbf{L} είναι ένας γραμμικός τελεστής, g είναι γνωστή συνάρτηση και f είναι μία άγνωστη συνάρτηση. Για τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, ο \mathbf{L} είναι ολοκληρωτικο-διαφορικός τελεστής, η g είναι συνάρτηση διέγερσης

(προσπίπτον πεδίο) και f είναι η άγνωστη συνάρτηση απόκρισης (φορτίο, ρεύμα).

Με τη μέθοδο των ροπών, αναπτύσσουμε την άγνωστη συνάρτηση f σε μορφή δυναμοσειράς, δηλαδή:

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (2)$$

όπου a_n είναι άγνωστοι σταθεροί συντελεστές (συντελεστές βαρύτητας) και f_n είναι γνωστές συναρτήσεις, (στο πεδίο ορισμού του τελεστή \mathbf{L}), οι οποίες λέγονται *συναρτήσεις βάσης* (basic functions) ή *συναρτήσεις ανάπτυξης* (expansion functions). Οι συναρτήσεις βάσης μπορεί να είναι βαθμωτές ή διανυσματικές, ανάλογα με το πρόβλημα. Αντικαθιστούμε τον τύπο (2) στη σχέση (1) και λόγω της γραμμικότητας του τελεστή έχουμε:

$$\sum_{n=1}^N a_n \mathbf{L}(f_n) = g \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση (3) είναι μία εξίσωση με N αγνώστους, άρα δεν μπορεί να επιλυθεί. Ορίζουμε ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις w_m , (στο σύνολο τιμών του τελεστή \mathbf{L}), οι οποίες λέγονται *συναρτήσεις βάρους* (weighting functions), ή *συναρτήσεις δοκιμής* (testing functions). Για να πάρουμε N ανεξάρτητες εξισώσεις, πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (3) με κάθε μία από τις συναρτήσεις βάρους w_m και στη συνέχεια παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον τύπο:

$$\langle w_m, f_n \rangle = \int_{w_m} w_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{f_n} f_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}$$

όπου τα ολοκληρώματα μπορεί να είναι γραμμικά, επιφανειακά ή όγκου, ανάλογα με το είδος των συναρτήσεων βάρους (w_m) και συναρτήσεων βάσης (f_n).

Οπότε η σχέση (3) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathbf{L}(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle,$$

για κάθε $m = 1, 2, 3 \dots$

Αν πάρουμε $m=N$, θα έχουμε ένα γραμμικό σύστημα $N \times N$ στη μορφή $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ όπου τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{Z} είναι:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \langle w_1, \mathbf{L}(f_1) \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathbf{L}(f_N) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, \mathbf{L}(f_1) \rangle & \cdots & \langle w_N, \mathbf{L}(f_N) \rangle \end{pmatrix}$$

τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{a} είναι:

$$\mathbf{a} = [a_n] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

και τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{b} είναι:

$$\mathbf{b} = [b_m] = [\langle w_m, g \rangle] = \begin{pmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας \mathbf{Z} είναι αντιστρέψιμος, τότε υπολογίζουμε τον πίνακα \mathbf{a} , ($\mathbf{a} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b}$) και έτσι έχουμε υπολογίσει τους συντελεστές βαρύτητας a_n , οπότε υπολογίζουμε τη συνάρτηση f από τη σχέση (2).

Συνοψίζοντας, με την MoM, επιλέγουμε εμείς τις συναρτήσεις βάσης f_n και τις συναρτήσεις βάρους w_m και υπολογίζουμε τους συντελεστές βαρύτητας a_n . Οι συναρτήσεις f_n και w_m πρέπει να επιλεγούν έτσι, ώστε να είναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητες, για να έχει λύση το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει. Από την επιλογή των συναρτήσεων f_n και w_m εξαρτάται (Harrington, 1993, σελ. 7):

1. Η ακρίβεια της λύσης.
2. Η ευκολία υπολογισμού των στοιχείων των πινάκων
3. Το μέγεθος του πίνακα \mathbf{Z} (το πλήθος των εξισώσεων N)
4. Η μορφή του πίνακα \mathbf{Z} (π.χ. διαγώνιος, συμμετρικός, αντισυμμετρικός)

B. Συναρτήσεις βάρους

1) *Σημειακή Προσαρμογή*: Για να εφαρμόσουμε την MoM, πρέπει να γίνει ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα $\mathbf{Z} = [z_{mn}] = [\langle w_m, \mathbf{L}(f_n) \rangle]$ και του πίνακα $\mathbf{b} = [b_m] = [\langle w_m, g \rangle]$. Όμως, σε πολλά πρακτικά προβλήματα, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στα εσωτερικά γινόμενα είναι δύσκολος και χρονοβόρος. Έτσι προσεγγίζουμε τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων, απαιτώντας τα ολοκληρώματα να ικανοποιούνται σε διακριτά σημεία της περιοχής του ενδιαφέροντος (συνήθως εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες σε διακριτές θέσεις του συνόρου του αντίστοιχου προβλήματος). Αυτή η μέθοδος ονομάζεται *σημειακή προσαρμογή (point-matching method)*.

Η παραπάνω διαδικασία είναι ισοδύναμη, αν πάρουμε για συναρτήσεις βάρους, την γενικευμένη συνάρτηση δέλτα του Dirac, δηλαδή:

$$w_m(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

αφού:

$$z_{mn} = \iint_S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \mathbf{L}(f_n(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \mathbf{L}(f_n(\mathbf{r}_m)) \quad (4)$$

$$b_m = \iint_S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = g(\mathbf{r}_m) \quad (5)$$

και \mathbf{r}_m είναι τα διακριτά σημεία εφαρμογής της μεθόδου, για κάθε $m=1,2,\dots,N$.

2) *Μέθοδος Galerkin*: Αν διαλέξουμε για συναρτήσεις βάρους, τις συναρτήσεις βάσης, δηλαδή:

$$w_n = f_n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots, N$$

έχουμε το πλεονέκτημα να εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες σε όλη την περιοχή του συνόρου, σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ συνηθισμένη στα προβλήματα και ονομάζεται *μέθοδος Galerkin*.

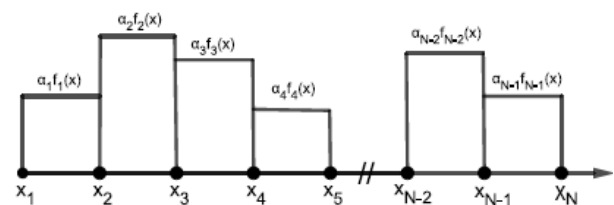
C. Κοινές Συναρτήσεις βάσης δύο διαστάσεων

Οι συναρτήσεις βάσης πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε να αντιπροσωπεύουν ικανοποιητικά την άγνωστη συνάρτηση f και να μειώνουν τον χρόνο υπολογισμού των στοιχείων των πινάκων. Υπάρχουν πάρα πολλές συναρτήσεις βάσης, όμως στην πράξη χρησιμοποιείται ένας περιορισμένος αριθμός από αυτές, οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις τμηματικές συναρτήσεις (subdomain functions), οι οποίες είναι μη μηδενικές μόνο σ' ένα τμήμα του πεδίου ορισμού. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει συναρτήσεις που είναι ορισμένες σ' όλο το πεδίο ορισμού (entire-domain functions) και η διαδικασία υπολογισμού είναι ανάλογη με το ανάπτυγμα σε σειρές Fourier. Στα περισσότερα προβλήματα πρακτικού ενδιαφέροντος, χρησιμοποιούνται κυρίως οι τμηματικές συναρτήσεις, για τις οποίες δεν απαιτείται η μορφή της άγνωστης συνάρτησης f . Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένες από αυτές.

1) *Παλμικές Συναρτήσεις*: Παίρνουμε N σημεία x_1, x_2, \dots, x_N και χωρίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε $N-1$ ίσα διαστήματα (διαμέριση), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Η παλμική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και αποτελείται από $N-1$ συναρτήσεις βάσης. Τα διαστήματα δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσα.

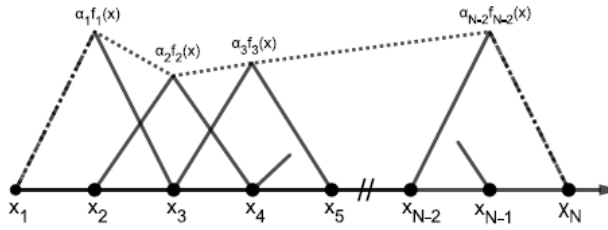


Σχήμα 1. Παλμική συνάρτηση με συντελεστές βαρύτητας α_i

2) *Τριγωνικές Συναρτήσεις*: Με την ίδια διαμέριση, όπως εφαρμόστηκε στην παλμική συνάρτηση, η τριγωνική (ή κατά τμήματα γραμμική) συνάρτηση, ορίζεται από τον τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ \frac{x_{n+2} - x}{x_{n+2} - x_{n+1}}, & x_{n+1} \leq x \leq x_{n+2} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Σε αντίθεση με την παλμική, η τριγωνική συνάρτηση καλύπτει δύο διαστήματα της διαμέρισης, οπότε έχουμε $N-2$ συναρτήσεις βάσης, όπως εμφανίζεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Τριγωνική συνάρτηση με συντελεστές βαρύτητας α_i

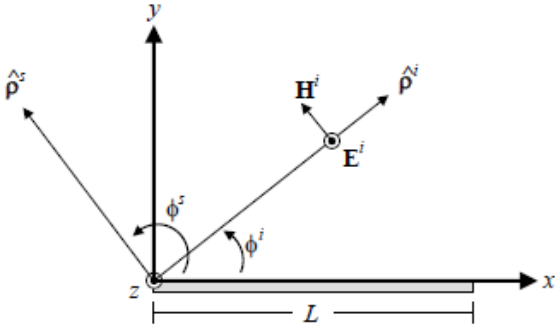
III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πρόβλημα EFIE Δύο Διαστάσεων: TM πόλωση

Ορίζουμε μία λεπτή, πεπερασμένου πλάτους λωρίδα, τέλειου αγωγίμου υλικού, μήκους L , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Ένα ομοιόμορφο επίπεδο κύμα (TM πόλωση) προσπίπτει στη λωρίδα. Το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^i δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{E}^i(\boldsymbol{\rho}) = E_0 e^{ik\hat{\boldsymbol{\rho}}^i \cdot \boldsymbol{\rho}} \hat{\mathbf{z}} = E_0 e^{ik(x \cos\phi^i + y \sin\phi^i)} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου E_0 είναι το μέτρο ενός σταθερού διανύσματος και εκφράζει το πλάτος του κύματος, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου παρατήρησης και $\hat{\boldsymbol{\rho}}^i = (\cos\phi^i, \sin\phi^i)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της πρόσπτωσης.



Σχήμα 3. Ομοιόμορφο επίπεδο κύμα προσπίπτει σε λεπτή λωρίδα: EFIE, TM πόλωση

Στην επιφάνεια της λωρίδας (για $y=0$), το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\mathbf{E}^i(x, 0) = E_0 e^{ikx \cos\phi^i} \hat{\mathbf{z}}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Εφόσον το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^i , έχει συνιστώσα μόνο ως προς τον άξονα z , θα πρέπει και το επαγόμενο επιφανειακό ρεύμα πυκνότητας \mathbf{J} , να έχει συνιστώσα μόνο ως προς τον άξονα z , ανεξάρτητο από τη μεταβλητή z .

Η ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου δύο διαστάσεων (EFIE 2D) για TM πόλωση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\frac{4E_0}{\omega\mu} e^{ikx \cos\phi^i} = \int_0^L J_z(x') H_0^{(2)}(k|x-x'|) dx' \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της φυσικής οπτικής (PO), η πυκνότητα ρεύματος υπολογίζεται από τον τύπο (Gibson, 2008, σελ.96):

$$J_s^{PO}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2E_0}{\eta} \sin\phi^i e^{ikx \cos\phi^i} \hat{\mathbf{z}} \quad (7)$$

A. Επίλυση με παλμική συνάρτηση βάσης - Σημειακή Προσαρμογή.

Λύνουμε την εξίσωση (6) ως προς την άγνωστη πυκνότητα ρεύματος $J_z(x)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών. Θα εφαρμόσουμε τη σημειακή προσαρμογή και για συνάρτηση βάσης θα χρησιμοποιήσουμε την παλμική συνάρτηση. Για την διαδικασία της σημειακής προσαρμογής, διαιρούμε τη λεπτή λωρίδα σε N ίσα τμήματα πλάτους $\Delta = \frac{L}{N}$ και σε κάθε τμήμα παίρνουμε τα σημεία x_m , $m = 1, 2, \dots, N$ στο μέσο του κάθε τμήματος.

Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{Z} υπολογίζονται από τη σχέση (4), οπότε:

$$z_{mn} = \mathbf{L}(f_n(x_m)) = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} H_0^{(2)}(k|x_m - x'|) dx' \quad (8)$$

και τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{b} υπολογίζονται από τη σχέση (5), άρα:

$$b_m = \frac{4E_0}{\omega\mu} e^{ikx_m \cos\phi^i} \quad (9)$$

Επειδή τα ολοκληρώματα στη σχέση (8) δεν μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς σε κλειστή μορφή, θα τα υπολογίσουμε προσεγγιστικά. Παίρνοντας τα σημεία της πηγής να είναι στο μέσο του κάθε τμήματος της διαμέρισης (όπως και τα σημεία παρατήρησης x_m), τα στοιχεία z_{mn} , για $m \neq n$ υπολογίζονται με την απλή κεντρική προσέγγιση (κανόνας του ορθογωνίου) από τον τύπο:

$$z_{mn} = H_0^{(2)}(k|x_m - x_n|)\Delta \quad (10)$$

Για τα στοιχεία z_{mm} χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης Hankel 2^{ου} είδους και μηδενικής τάξης, δηλαδή:

$$H_0^{(2)}(kx) \approx 1 - i \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma kx}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

και ο τύπος γίνεται:

$$z_{mm} = \Delta \left(1 - i \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma k\Delta}{4e} \right)$$

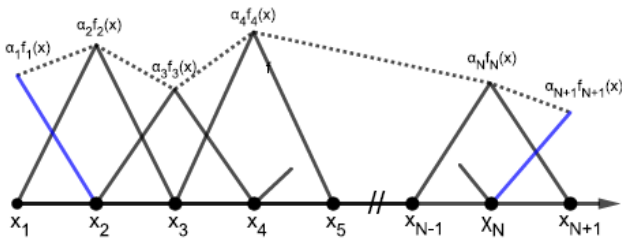
Με ανάλογο τρόπο, για τα γειτονικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{Z} , δηλαδή $|m-n|=1$, υπάρχει καλύτερη προσέγγιση από τον τύπο (10) και ισχύει (Gibson, 2008, σελ.97):

$$z_{mn} = \Delta - i \frac{\Delta}{\pi} \left[3 \ln \left(\frac{3\gamma k\Delta}{4} \right) - \ln \left(\frac{\gamma k\Delta}{4} \right) - 2 \right]$$

B. Επίλυση με τριγωνική συνάρτηση βάσης-Μέθοδος Galerkin

Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση (6), ως προς την άγνωστη πυκνότητα ρεύματος $J_z(x)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Galerkin με τριγωνικές συναρτήσεις βάσης και βάρους. Διαιρούμε τη λεπτή λωρίδα σε N ίσα τμήματα πλάτους $\Delta = \frac{L}{N}$ και έτσι έχουμε $N+1$ σημεία x_m , $m = 1, 2, \dots, N, N+1$ στα άκρα του κάθε τμήματος.

Επειδή η πυκνότητα ρεύματος στ' άκρα της λωρίδας δεν είναι μηδέν, η τριγωνική συνάρτηση ορίζεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, δηλαδή:



Σχήμα 4. Τριγωνική συνάρτηση με μη μηδενικές τιμές στ' άκρα

Εδώ έχουμε N τμήματα, άρα $N+1$ σημεία και $N+1$ συναρτήσεις, από τις οποίες οι $N-1$ είναι ολόκληρα τρίγωνα και οι δύο είναι μισά τρίγωνα (στις δύο άκρες του σχήματος).

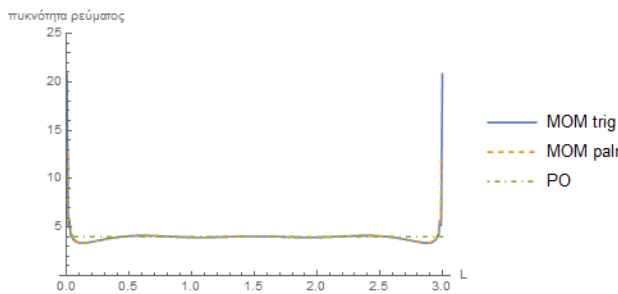
Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{Z} υπολογίζονται από τη σχέση

$$z_{mn} = \int_{f_m} f_m(x) \int_{f_n} f_n(x') H_0^{(2)}(k|x-x'|) dx' dx$$

και τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{b} υπολογίζονται από τη σχέση:

$$b_m = \frac{4E_0}{\omega\mu} \int_{f_m} f_m(x) e^{ikx \cos\varphi^i} dx$$

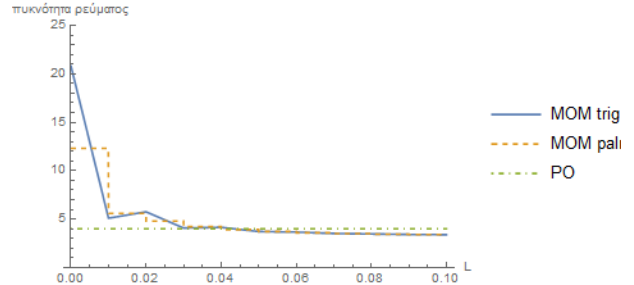
Με τη βοήθεια του λογισμικού Mathematica, για $N=300$, $E_0 = 1$, $\lambda=1$, $L=3\lambda$, $\varepsilon=4$, $\mu=1$, $\varphi^i = \pi/2$ και $M=5$ (για τον κανόνα ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre), λύνουμε το σύστημα $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$, βρίσκουμε τους συντελεστές a_n και υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση της πυκνότητας ρεύματος $J_z(x)$ στην επιφάνεια του αγωγού από τη σχέση (2). Στο Σχήμα 5, απεικονίζονται μαζί οι γραφικές παραστάσεις της προσεγγιστικής συνάρτησης με τη Μέθοδο των Ροπών, με χρήση της τριγωνικής (MOM trig) και παλμικής συνάρτησης (MOM palm) (το πραγματικό μέρος της συνάρτησης), καθώς και η γραφική παράσταση της φυσικής οπτικής (PO), σύμφωνα με τον τύπο (7).



Σχήμα 5. Γραφική παράσταση της πυκνότητας ρεύματος λεπτής λωρίδας για $N=300$, $\varphi^i = \pi/2$, EFIE, TM πόλωση με τριγωνική και παλμική συνάρτηση βάσης

Από το Σχήμα 5, παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις (με τριγωνική και παλμική συνάρτηση βάσης), στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος, είναι σχεδόν ίδιες και ταυτόσημες με την γραφική παράσταση της φυσικής οπτικής (PO). Όμως, στ' άκρα του διαστήματος οι τιμές της πυκνότητας ρεύματος, που υπολογίζουμε με την τριγωνική συνάρτηση βάσης, είναι αρκετά μεγαλύτερες, σχεδόν διπλάσιες, από τις αντίστοιχες τιμές, που έχουμε με τη χρήση της παλμικής συνάρτησης και πολύ παραπάνω από τις τιμές της φυσικής οπτικής. Το παραπάνω σχόλιο είναι εμφανές στο Σχήμα 6, στο οποίο

απεικονίζονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις μόνο στο αριστερό άκρο του διαστήματος. Είναι φανερό λοιπόν, πόσο καλύτερα μπορεί να προσεγγίσει την αναμενόμενη φυσική συμπεριφορά του ρεύματος η μέθοδος των ροπών με τριγωνική συνάρτηση βάσης, σε σχέση με την παλμική. Με την τριγωνική συνάρτηση έχουμε καλύτερη προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών της πυκνότητας ρεύματος, ενώ με την παλμική προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τις συνοριακές συνθήκες κλιμακωτά.



Σχήμα 6. Γραφική παράσταση της πυκνότητας ρεύματος στο αριστερό άκρο της λεπτής λωρίδας για $N=300$, $\varphi^i = \pi/2$, EFIE, TM πόλωση με τριγωνική και παλμική συνάρτηση βάσης

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την παρούσα διπλωματική εργασία, δίνεται η δυνατότητα μελέτης και εφαρμογής της μεθόδου των ροπών σε συγκεκριμένα προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού. Επιπλέον δίνεται το έναυσμα και τα εφόδια για περαιτέρω μελέτη και διερεύνηση των εφαρμογών της μεθόδου και σε άλλα προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Aθανasiάδης, X. (2015). Ειδικά θέματα Μαθηματικών - Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές, (τόμος Α'). Πάτρα: ΕΑΠ.
- Balanis, C. A. (2012). Advanced Engineering Electromagnetics, (2nd ed.). USA: John Wiley and Sons.
- Cheng, K. D. (2014). Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα, (2^η εκδ.). (μτφ.: Α. Κορδαλής, Π. Κυριάκης & Ν. Σχιζάς). Αθήνα: Εκδόσεις Φούντας.
- Δάσιος, Γ. (2013). Ειδικά Θέματα Μαθηματικών-Μαθηματικά Πρότυπα Ιατρικής Φυσικής-Μαθηματική θεμελίωση της ηλεκτρικής και μαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, (τόμ. Β2). Πάτρα: ΕΑΠ.
- Gibson, C. W. (2008). The Method of Moments in Electromagnetics. New York: CRC Press, Chapman & Hall.
- Griffiths, J. D. (2014). Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική (2η αναθεωρημένη έκδοση). (μτφ.: Σ. Αρβανιτίδης & Α. Λαυρέντζος). Ηράκλειο Κρήτης: Παν. Εκδ. Κρήτης.
- Harrington, R. F. (1993). Field Computation by Moment Methods. New York: Wiley-IEEE Press.
- Τραχανάς, Σ. (2016). Mathematica και Εφαρμογές -Για Μαθηματικούς, Φυσικούς και Μηχανικούς. Ηράκλειο Κρήτης: Παν. Εκδ. Κρήτης.
- Valero A. & Rojas R. (2000). Fast analysis of electromagnetic scattering from finite strip gratings on a grounded dielectric slab. Radio Science, 35(6) 1307-1314. doi:10.1029/1999RS002249.
- Warnick K. & Chew W. (2001) On the spectrum of the electric field integral equation and the convergence of the moment method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 51(1) 31-56. doi:10.1002/nme.144.
- Tsitsas N. L. & Uzunoglu N. K. (2004) Electromagnetic Analysis of a Two-dimensional Diffraction Grating Reflector. Advances in Scattering and Biomedical Engineering, World Scientific Publishing Company, 414-422.
- Tsitsas N. L., Kaklamani D. I. & Uzunoglu N. K. (2006) Integral equation analysis of coupling in symmetric grating assisted optical waveguides. J. Opt. Soc. America A 23(6), 1488-1502.