

Προβλήματα Πολλαπλής Σκέδασης από δύο Κυλινδρικούς Σκεδαστές

Εφαρμογή σε Περιβάλλον Mathematica

Αικατερίνη Ν. Αντιμαχίτου

Μαθηματικός και Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια ΜΣΜ/ΣΘΕΤ,ΕΑΠ

katerinaantimaxitou@gmail.com,

std091050@ac.eap.gr

Μαρία Ε.Χατζηνικολάου

Καθηγήτρια Ε.Α.Π

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Ε.Α.Π.

hadjinicolaou@eap.gr

Περίληψη-Στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη του ευθέως προβλήματος της σκέδασης ακουστικών κυμάτων από δύο κυλινδρικούς σκεδαστές.

Λέξεις-Κλειδιά:Πολλαπλή σκέδαση, ανθεκτικός σκεδαστής, διαπερατός σκεδαστής.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία σκέδασης ακουστικών κυμάτων ασχολείται με τη μελέτη των μεταβολών που υφίσταται ένα κυματικό πεδίο, όταν στο χώρο διάδοσής του υπάρχει ένα ή περισσότερα εμπόδια. Ένα ακουστικό κύμα προσπίπτει στο εμπόδιο (σκεδαστής), ο σκεδαστής εκτρέπει ένα τμήμα της ενέργειας του αρχικού κυματικού πεδίου (προσπίπτον πεδίο), δημιουργώντας ένα δευτερογενές κυματικό πεδίο (σκεδασμένο πεδίο). Το σκεδασμένο πεδίο εκτός από τα χαρακτηριστικά του προσπίπτοντος, ενσωματώνει και μεταφέρει στην περιοχή ακτινοβολίας, τόσο τη γεωμετρία της επιφάνειας όσο και τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή. Τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τα διάφορα ευθέα προβλήματα ακουστικής σκέδασης με αρμονική χρονική εξάρτηση είναι εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την ελλειπτικού τύπου εξίσωση Helmholtz. Τα γνωστά προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet, Neumann, Robin και διαπερατότητας ορίζουν αντίστοιχα προβλήματα σκέδασης. Οι μεταβολές της ταχύτητας και της πίεσης του ρευστού στην επιφάνεια του σκεδαστή καθορίζουν τις συνοριακές συνθήκες των προβλημάτων. Επειδή τα προβλήματα είναι εξωτερικά απαιτείται μια συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο.

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

A. Ανθεκτικός Σκεδαστής

Ας είναι O η αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Ένα σημείο έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = (x, y)$ με σημείο αναφοράς το O . Θεωρούμε δύο κυλίνδρους με κυκλικές διατομές $S_j, j = 1, 2$. Ο κύκλος S_j έχει ακτίνα a_j και κέντρο O_j με $\mathbf{r} = \mathbf{b}_j$. Ορίζουμε πολικές συντεταγμένες (r_j, θ_j) στο O_j , έτσι ώστε $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$, με $\mathbf{r}_j = r_j(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$. Το δοσμένο προσπίπτον πεδίο u_{inc} σκεδάζεται από δύο κυλίνδρους. Υποθέτουμε ότι σε μια περιοχή κάθε κυλίνδρου (συμπεριλαμβανομένου και του εσωτερικού κάθε κυλίνδρου) το u_{inc} είναι μία κανονική λύση της εξίσωσης Helmholtz, έτσι ώστε:

$$u_{inc} = \sum_m d_m^j \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_j), j = 1, 2 \quad (1)$$

όπου $\hat{\psi}_m(\mathbf{r}) = J_m(kr)e^{im\theta}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Οι συντελεστές είναι γνωστοί από το προσπίπτον κύμα. Εκφράζουμε το σκεδασμένο πεδίο, σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα από πολύπολα στο κέντρο κάθε κυκλικού δίσκου $u_{sc} = \sum_m c_m^1 \psi_m(\mathbf{r}_1) + \sum_m c_m^2 \psi_m(\mathbf{r}_2)$ (2)

όπου $\psi_m(\mathbf{r}) = H_m(kr)e^{im\theta}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, με H_m συμβολίζουμε τη συνάρτηση Hankel 1^{ου} είδους. Οι συντελεστές προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη σε κάθε κυκλικό δίσκο. Θεωρούμε τον κυκλικό δίσκο S_1 . Για να χρησιμοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη στο $r_1 = a_1$, πρέπει να εκφράσουμε κάθε όρο συναρτήσει του θ_1 . Πρέπει να εκφράσουμε το $\psi_m(\mathbf{r}_2)$ ως συνάρτηση του $\mathbf{r}_1$. Στη «γειτονιά» του O_1 το $\psi_m(\mathbf{r}_2)$ είναι μια κανονική λύση της εξίσωσης Helmholtz, κατά συνέπεια μπορεί να

γραφεί συναρτήσει της $\hat{\psi}_n(\mathbf{r}_1)$. Ας είναι $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου O_1 ως προς σημείο αναφοράς O_2 . Έχουμε:

$$\psi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_n S_{mn}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}_1) \quad \text{για } r_1 < b < |\mathbf{b}| \quad (3)$$

η ανισότητα προκύπτει από το γεγονός πως το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ιδιόμορφη όταν

$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{b}$. Ο πίνακας είναι ένας πίνακας διαχωρισμού, και τα στοιχεία του δίνονται από τη σχέση :

$$S_{mn}(\mathbf{b}) = \psi_{m-n}(\mathbf{b}) = H_{m-n}(kb) e^{i(m-n)\beta}$$

όπου $\mathbf{b} = (b \cos \theta, b \sin \theta)$.

Εφαρμόζουμε το προσθετικό θεώρημα Graf για να επεκτείνουμε το σκεδασμένο πεδίο κοντά στον S_1 και συνδυάζοντας με τη σχέση παίρνουμε:

$$u = \sum_m \{ d_m^1 J_m(kr_1) e^{im\theta_1} + c_m^1 H_m(kr_1) e^{im\theta_1} + J_m(kr_1) e^{im\theta_1} \sum_n S_{nm}(b) c_n^2 \}$$

για $r_1 < b$.

Εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη Robin στον S_1 . Θεωρώντας ότι ο S_1 είναι ανθεκτικός, παραγωγίζουμε ως προς r_1 , θέτουμε $r_1 = a_1$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_m \{ & d_m^1 (kJ'_m(kr_1) + \lambda J_m(kr_1)) \\ & + c_m^1 (kH'_m(kr_1) + \lambda H_m(kr_1)) \\ & + kJ'_m(kr_1) \sum_n S_{nm}(b) c_n^2 \\ & + \lambda J_m(kr_1) \sum_n S_{nm}(b) c_n^2 \} e^{im\theta_1} = 0 \end{aligned}$$

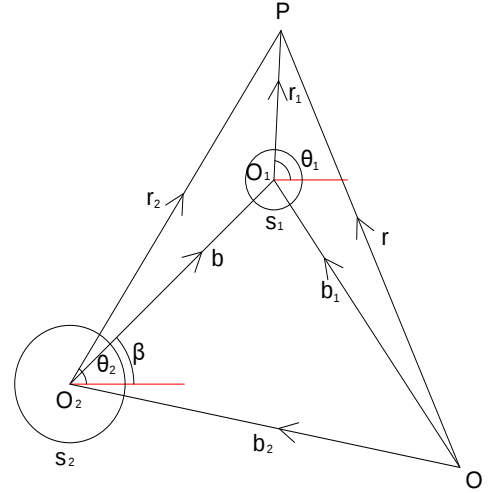
χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ορθογωνιότητας για την $\{e^{im\theta_1}\}$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d_m^1 (kJ'_m(a_1) \lambda J_m(ka_1)) \\ = -c_m^1 (kH'_m(ka_1) + \lambda H_m(ka_1)) \\ - (kJ'_m(ka_1) \\ + \lambda J_m(ka_1)) \sum_n S_{nm}(b) c_n^2 \end{aligned}$$

θεωρώντας ότι και ο άλλος κυκλικός δίσκος S_2 , είναι ανθεκτικός, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} d_m^2 (kJ'_m(a_2) \lambda J_m(ka_2)) \\ = -c_m^2 (kH'_m(ka_2) + \lambda H_m(ka_2)) \\ - (kJ'_m(ka_2) \\ + \lambda J_m(ka_2)) \sum_n S_{nm}(-b) c_n^1 \end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων αποτελεί ένα σύστημα απείρων γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές c_m^1, c_m^2 .



Σχήμα 1. Σκέδαση από δύο σκεδαστές.

B. Συνθήκη Διαπερατότητας

Ας είναι O η αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Ένα σημείο έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = (x, y)$ με σημείο αναφοράς το O . Θεωρούμε δύο κυλίνδρους με κυκλικές διατομές $S_j, j = 1, 2$. Ο κύκλος S_j έχει ακτίνα a_j και κέντρο O_j με $r = b_j$. Ορίζουμε πολικές συντεταγμένες (r_j, θ_j) στο O_j , έτσι ώστε $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$, με $\mathbf{r}_j = r_j(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$. Έστω ρ_0, c_0, k_0 η πυκνότητα, η ταχύτητα του ήχου και ο κυματάρθρωτος αντίστοιχα στο εξωτερικό των δύο κυλίνδρων και ρ_j, c_j, k_j η πυκνότητα, η ταχύτητα και ο κυματάρθρωτος στο εσωτερικό του σκεδαστή με διατομή $S_j, j = 1, 2$.

Είναι:

$$\hat{\psi}_m = J_m(kr) e^{im\theta}$$

η κανονική κυλινδρική κυματοσυνάρτηση και

$$\psi_m = H_m(kr) e^{im\theta}$$

η εξερχόμενη κυλινδρική κυματοσυνάρτηση όπου $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου με $H_m(kr)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους $H_m^{(2)}(kr)$.

Το προσπίπτον κύμα έχει τη μορφή:

$$u_{incj} = \sum_m d_m^j \hat{\psi}_m(k_0 r_j)$$

όπου d_m^j γνωστοί συντελεστές από το u_{incj} του j σκεδαστή.

Για τον πρώτο κύλινδρο, το προσπίπτον πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$u_{inc1} = \sum_m d_m^1 J_m(k_0 r_1) e^{im\theta_1}$$

Το σκεδασμένο πεδίο από τον πρώτο κύλινδρο:

$$u_{sc1} = \sum_m c_m^1 H_m(k_0 r_1) e^{im\theta_1}$$

Το σκεδασμένο πεδίο από το δεύτερο κύλινδρο:

$$u_{sc2} = \sum_m c_m^2 H_m(k_0 r_2) e^{im\theta_2}$$

στο εσωτερικό, το πεδίο παίρνει τη μορφή:

$$u_1 = \sum_m f_m^1 J_m(k_1 r_1) e^{im\theta_1}$$

αντίστοιχα για το δεύτερο κύλινδρο:

$$u_{inc2} = \sum_m d_m^2 J_m(k_0 r_2) e^{im\theta_2}$$

το σκεδασμένο πεδίο από τον ίδιο κύλινδρο

$$u_{sc2} = \sum_m c_m^2 H_m(k_0 r_2) e^{im\theta_2}$$

στο εσωτερικό, είναι:

$$u_2 = \sum_m f_m^2 J_m(k_2 r_2) e^{im\theta_2}$$

Άρα το ολικό πεδίο στο εξωτερικό του πρώτου κυλίνδρου u_{01} , είναι:

$$u_{01} = \sum_m d_m^1 J_m(k_0 r_1) e^{im\theta_1} + \sum_m c_m^1 H_m(k_0 r_1) e^{im\theta_1} + \sum_m c_m^2 H_m(k_0 r_2) e^{im\theta_2} \quad (4)$$

πρέπει να εκφράσουμε το $\psi_m(r_2) = H_m(k_0 r_2) e^{im\theta_2}$ συναρτήσει του θ_1 .

Είναι:

$$\psi_m(r_2) = \sum_n S_{mn}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_1)$$

όπου $\mathbf{b}$ είναι το διάνυσμα $O_1 O_2$. Για τον πίνακα διαχωρισμού S_{mn} , ισχύει $S_{mn}(\mathbf{b}) = S_{nm}(-\mathbf{b})$ για κάθε m, n . Η σχέση (4) γίνεται:

$$u_{01} = \sum_m [d_m^1 J_m(k_0 r_1) + c_m^1 H_m(k_0 r_1) + J_m(k_0 r_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2] e^{im\theta_1}$$

Το ολικό πεδίο u_{02} , δίνεται από τη σχέση:

$$u_{02} = \sum_m [d_m^2 J_m(k_0 r_2) + c_m^2 H_m(k_0 r_2) + J_m(k_0 r_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1] e^{im\theta_2}$$

Η συνοριακή συνθήκη για τον σκεδαστή, είναι: $u_{0j} = u_j$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{u_{incj}}{\partial r_j} = \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial u_j}{\partial r_j}$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη και χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ορθογωνιότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} d_m^1 J_m(k_0 a_1) + c_m^1 H_m(k_0 a_1) \\ + J_m(k_0 a_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2 \\ = f_m^1 J_m(k_1 a_1) \end{aligned}$$

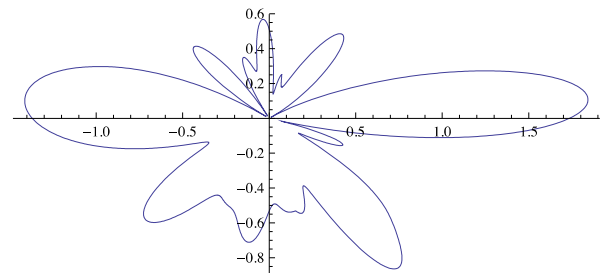
$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\rho_0} \{d_m^1 J'_m(k_0 a_1) + c_m^1 H'_m(k_0 a_1) \\ + J'_m(k_0 a_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2\} \\ = \frac{k_1}{\rho_1} f_m^1 J'_m(k_1 a_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_m^2 J_m(k_0 a_2) + c_m^2 H_m(k_0 a_2) \\ + J_m(k_0 a_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1 \\ = f_m^2 J_m(k_2 a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\rho_0} \{d_m^2 J'_m(k_0 a_2) + c_m^2 H'_m(k_0 a_2) \\ + J'_m(k_0 a_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1\} \\ = \frac{k_2}{\rho_2} f_m^2 J'_m(k_2 a_2) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω σχέσεων παίρνουμε του συντελεστές c_m^1, c_m^2 .

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



Σχήμα 2. Η ένταση του ολικού πεδίου όταν οι δύο κυκλικοί σκεδαστές είναι διαπερατοί έχουν ακτίνες $a_1 = a_2 = 1$, βρίσκονται σε απόσταση $r=8$, έχουν πυκνότητες $\rho_1 = \rho_2 = 2$, η πυκνότητα στο εξωτερικό τους είναι $\rho_0 = 1$ και οι τιμές των κυματαριθμών είναι $k_0 = 2.2, k_1 = k_2 = 2$

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη μελέτη του προβλήματος που πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του Mathematica μπορούμε να συμπεράνουμε πως το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου εξαρτάται από την απόσταση της παρατήρησης. Όσο ο παρατηρητής απομακρύνεται από τους σκεδαστές, τόσο ελαττώνεται το μέτρο της έντασης. Το πλήθος των όρων που είναι απαραίτητοι για να υπάρξει καλή σύγκλιση, εξαρτάται από το ka και το πλήθος των σκεδαστών. Το ολικό πεδίο παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα x , γεγονός που εξηγείται από τη συμμετρία των σκεδαστών.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι συγγραφείς θέλουν να ευχαριστήσουν τον καθηγητή της ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ κ Δρόσο Γκιντίδη για την εποικοδομητική συνεισφορά του στην εκπόνηση της εργασίας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Abramowitz, M., Stegun, A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation.
- Colton, D., Kress, R. (1983). *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley, New York.
- Martin, P. A. (1995). *Multiple Scattering, an Invitation, Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, Philadelphia:SIAM.
- Martin, P.A. (2006). *Multiple Scattering*, New York, Cambridge: University Press.
- Roumeliotis, J.A., Ziotopoulos, A.-G., P. and Kokkorakis, G. C. (2001). *Acoustic Scattering by a Circular Parallel with another of Small Radius*, Journal Acoustical Soc. Amer.
- Αθανασιάδης, Ε.Χ. (2014). *Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές*, ΕΑΠ.
- Τραχανάς, Σ. (2004). *Mathematica και Εφαρμογές*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.