

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ GREEN, GAUSS ΚΑΙ STOKES ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Χαράλαμπος Κανδηλαναύτης

Μαθηματικός και Μεταπτ. Φοιτητής ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

hkan07@yahoo.gr, std074770@ac.eap.gr

Ανδρέας Μπούκας

PhD Mathematics, 1988, Southern Illinois
University, USA και Μέλος ΣΕΠ ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

boukas.andreas@ac.eap.gr

Περίληψη – Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να εξετάσει το ρόλο των θεωρημάτων των Green, Gauss και Stokes στη Θεωρία Σκέδασης.

Πιο συγκεκριμένα, στοχεύει να αναδείξει την ουσιαστική συμβολή των θεωρημάτων αυτών στη σκέδαση των ακουστικών και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Παράλληλα, μέσα από την αναλυτική (βήμα προς βήμα) απόδειξη, τις παραπομπές σε θεωρήματα και τύπους που αποδεικνύονται, την εφαρμογή της θεωρίας της Διανυσματικής Ανάλυσης στη Θεωρία Σκέδασης, καθώς και τις γραφικές αναπαραστάσεις των εμπλεκόμενων πεδίων και εννοιών, έχει σαν στόχο να συμβάλει στην άρση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά την επίλυση προβλημάτων Διανυσματικού Λογισμού (Bollen, van Kampen, Baily, Kelly, & De Cock, 2017).

Τα παραπάνω υλοποιήθηκαν μέσα από: α) την παρουσίαση των θεωρημάτων των Green, Gauss και Stokes, καθώς και των απαραίτητων ολοκληρωτικών τύπων της Θεωρίας Σκέδασης που προκύπτουν από τα θεωρήματα αυτά, β) τη μελέτη της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Helmholtz μαζί με τις ασυμπτωτικές της ιδιότητες και γ) τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για το εσωτερικό, το σύνορο και τον εξωτερικό χώρο ενός σκεδαστή.

Λέξεις-Κλειδιά: Διανυσματική Ανάλυση-Λογισμός, Θεωρία Σκέδασης, Θεωρήματα Αναπαράστασης

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία αναπτύσσεται γύρω από δύο κύριους άξονες. Ο πρώτος άξονας αφορά στον καθορισμό του πεδίου μελέτης και στο θεωρητικό υπόβαθρό της. Γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία της σκέδασης ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Εξηγείται το φυσικό φαινόμενο της σκέδασης και περιγράφονται τα προβλήματα που μελετώνται στη θεωρία αυτή. Δίδονται παραδείγματα σκέδασης που συναντάμε καθημερινά, στα οποία η επιστημονική μελέτη του φαινομένου συμβάλλει στην αναβάθμιση της ποιότητας της ζωής μας. Τέτοιου είδους προβλήματα μελετώνται υποθέτοντας χρονική αρμονική εξάρτηση και, κατά συνέπεια, ικανοποιείται η εξίσωση Helmholtz. Προκειμένου να είναι καλά τοποθετημένο ένα τέτοιο πρόβλημα, απαιτούνται οριακές συνθήκες στο άπειρο που καθορίζονται από τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Κρίθηκε, λοιπόν, απαραίτητη η αναλυτική παρουσίαση των χρήσιμων

ιδιοτήτων της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Helmholtz καθώς και των ασυμπτωτικών συμπεριφορών της. Στη συνέχεια διατυπώνονται τα θεωρήματα των Green, Gauss και Stokes (GGS), δίνεται η φυσική ερμηνεία τους και αναπαρίστανται γεωμετρικά. Τέλος, αναφέρονται οι ολοκληρωτικοί τύποι που προκύπτουν από τα παραπάνω θεωρήματα, οι οποίοι αποδεικνύονται υποδειγματικά.

Στον δεύτερο άξονα έχουμε τις εφαρμογές των θεωρημάτων των GGS, καθώς και των ολοκληρωτικών τύπων που προκύπτουν από αυτά, στη θεωρία σκέδασης. Αναπτύσσεται μια σειρά θεωρημάτων πρωταρχικής σημασίας της μελέτης των θεωρημάτων σκέδασης. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα θεωρήματα που αφορούν στην ολοκληρωτική αναπαράσταση των εξεταζόμενων πεδίων στο εσωτερικό, στο σύνορο και στον εξωτερικό χώρο ενός σκεδαστή.

A. Σκοπός και στόχοι της εργασίας

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η ανάδειξη της σπουδαιότητας των βασικών θεωρημάτων του Διανυσματικού Λογισμού (Vector Analysis), των GGS, στη Θεωρία Σκέδασης (Scattering Theory). Πιο συγκεκριμένα, στοχεύει να αναδείξει τη συμβολή των θεωρημάτων αυτών στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης των ακουστικών και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Επίσης έχει στόχο την άρση των δυσκολιών κατανόησης της επίλυσης προβλημάτων εφαρμογής ολοκληρωτικών τύπων και εξισώσεων στη Θεωρία Σκέδασης.

B. Αναγκαιότητα και συμβολή της εργασίας στην ήδη κεκτημένη γνώση

Από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας (Barkeshli, 2015; Colton & Kress, 1983; Colton & Kress, 2013; Kirsch & Hettlich, 2015; Wilcox, 1956a; Wilcox, 1956b; Αθανασιάδης, 2015) προέκυψε ότι σε μεγάλο βαθμό οι σχετικές αποδείξεις στη θεωρία σκέδασης, επειδή απευθύνονται κατά κύριο λόγο σε πολύ εξειδικευμένο ακροατήριο: α) στερούνται γραφικών αναπαραστάσεων των εμπλεκόμενων εννοιών, β) στερούνται αναλυτικών (βήμα προς βήμα) αποδείξεων, γ) σε πολλά σημεία είναι περιγραφικές, σε μορφή κειμένου δίνοντας γενικές οδηγίες για την αποδεικτική διαδικασία και δ) θεωρούν

δεδομένους αρκετούς ολοκληρωτικούς, διαφορικούς και ασυμπτωτικούς τύπους.

Κρίθηκε, λοιπόν, χρήσιμη η επαναπαρουσίαση των βασικών θεωρημάτων του Διανυσματικού Λογισμού, η παρουσίαση και η υποδειγματική απόδειξη των κύριων ολοκληρωτικών τύπων που χρησιμοποιούνται και προκύπτουν από τα θεωρήματα αυτά, η απόδειξη άλλων χρήσιμων ασυμπτωτικών τύπων όπως αυτοί χρησιμοποιούνται στη Θεωρία Σκέδασης, καθώς και η γεωμετρική αναπαράσταση των εννοιών για την απλοποίηση των νοημάτων και τη σαφήνεια της αποδεικτικής διαδικασίας. Με ανάλογο πνεύμα παρουσιάζονται και οι εφαρμογές που βρίσκουν τα βασικά θεωρήματα του Διανυσματικού Λογισμού στη Θεωρία Σκέδασης. Κατηγοριοποιούνται τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ανάλογα με το χώρο που υφίσταται το πεδίο και τον χώρο παρατήρησης, διατυπώνονται όλες οι περιπτώσεις και αποδεικνύονται. Εξάλλου, προκειμένου να αντιληφθούμε το νόημα των θεωρημάτων των GGS, θα πρέπει να τα κατανοήσουμε μέσα από απλές, αναλυτικές και γραφικές διαδικασίες ερμηνείας των εφαρμογών τους.

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μετά τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, παρουσιάζεται μια σειρά θεμελιωδών εφαρμογών των θεωρημάτων των GGS στη σκέδαση ακουστικών (acoustic waves scattering) και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (electromagnetic waves scattering). Σχολιάζονται οι εφαρμογές αυτές, οι αποδείξεις τους δίνονται βήμα προς βήμα, με πλήρεις επεξηγήσεις και παραπομπές σε άλλους τύπους που έχουν ήδη αποδειχθεί, ώστε να μπορεί εύκολα ο αναγνώστης να επαληθεύσει και επικυρώσει την όλη διαδικασία. Επί των αποτελεσμάτων στο κεφάλαιο «Αποτελέσματα – Συμπεράσματα» γίνεται σχολιασμός, ο οποίος ενισχύεται βάσει σχετικής βιβλιογραφίας. Αναφέρεται τι πήγε καλά και τι όχι, πιθανές προεκτάσεις της εργασίας, καθώς και οι περιορισμοί που προέκυψαν από το όλο εγχείρημα.

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

A. Ιδιότητες της θεμελιώδους λύσης Φ

Τόσο στα ακουστικά όσο και στα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα σκέδασης τα εμπλεκόμενα πεδία ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz. Για τον λόγο αυτό, η θεμελιώδης λύση (fundamental solution)

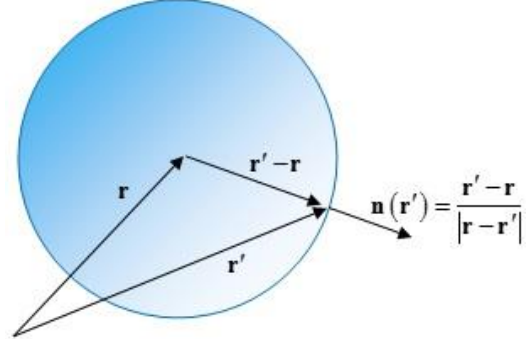
$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (\text{III.A.1})$$

της εξίσωσης Helmholtz εμφανίζεται συστηματικά στις ολοκληρωτικές εξισώσεις και αναπαραστάσεις που προκύπτουν μέσα από τη σχετική μελέτη. Επομένως, προκειμένου να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων των προβλημάτων σκέδασης (στο εσωτερικό, στο σύνορο και στο εξωτερικό του σκεδαστή) θα πρέπει να γνωρίζουμε και την αντίστοιχη συμπεριφορά-ιδιότητες της Φ .

Αρχικά, αποδείχθηκε (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) η ασυμπτωτική συμπεριφορά της

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.2})$$

Στη συνέχεια, για την περίπτωση της σφαίρας με επιφάνεια $S(\mathbf{r}, \rho) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \rho\}$ και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ στο $\mathbf{r}'$ με φορά προς το εξωτερικό της μπάλας (βλ. Σχήμα III.A.1)



Σχήμα III.A.1: Επιφάνεια κέντρου $\mathbf{r}$ και ακτίνας ρ

αποδείχθηκαν (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) οι εξής τύποι:

$$\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}')} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - ik\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = O\left(\frac{1}{r'^2}\right), \quad r' \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.3})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (\text{III.A.4})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (\text{III.A.5})$$

Αποδείχθηκαν (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018), επίσης, οι σχέσεις που ικανοποιεί η Φ ως προς τα διανυσματικά πεδία:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')) \\ = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') - \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')) \end{aligned} \quad (\text{III.A.6})$$

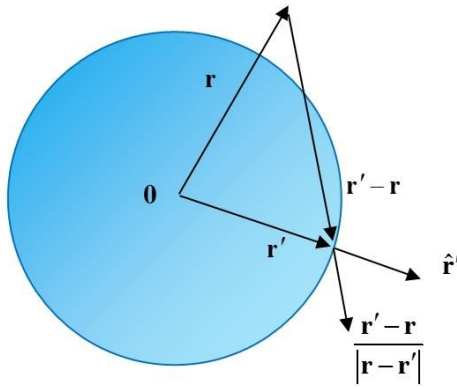
και

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \times (\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')) \\ = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') - \nabla_{\mathbf{r}'} \times (\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')) \end{aligned} \quad (\text{III.A.7})$$

Για την περίπτωση της σφαίρας με επιφάνεια $S(\mathbf{r}, \rho) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \rho\}$ και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ στο $\mathbf{r}'$ με φορά προς το εξωτερικό της μπάλας (βλ. Σχήμα III.A.1) αποδείχθηκε (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) ότι

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \\ - \nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \\ = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{III.A.8})$$

Για την περίπτωση της σφαίρας με επιφάνεια $S(\mathbf{0}, \rho) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}'| = \rho\}$ (βλ. Σχήμα III.A.2)



Σχήμα III.A.2: Επιφάνεια κέντρου 0 και ακτίνας r'

Αποδείχθηκαν (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) οι τύποι

$$\nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}') = O\left(\frac{1}{r'^2}\right), \quad r' \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.9})$$

και

$$\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}')} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - ik\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = O\left(\frac{1}{r'^2}\right), \quad r' \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.10})$$

Τέλος, μετά την απόδειξη των σχέσεων

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.11})$$

και

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.12})$$

αποδείχθηκαν (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) οι τύποι που ικανοποιεί η Φ συναρτήσει της συνάρτησης Hankel

$$h(r) = \frac{e^{ikr}}{r} :$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}')} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(\frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.14})$$

και

$$\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}')} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(-ike^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r}\right) \right), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{III.A.15})$$

B. Χρήσιμοι ολοκληρωτικοί τύποι

Μετά τη μελέτη των θεωρημάτων των Green, Gauss και Stokes αποδείχθηκαν (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018) χρήσιμοι ολοκληρωτικοί τύποι στη Θεωρία Σκέδασης που προκύπτουν από τα θεωρήματα αυτά.

Συγκεκριμένα, για βαθμωτά πεδία αποδείχθηκε ο τύπος

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_D \Delta_r u dV \quad (\text{III.B.1})$$

η 1^η βαθμωτή ταυτότητα του Green (Green's first scalar identity)

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_D (\nabla_r u \cdot \nabla_r v + u \Delta_r v) dV \quad (\text{III.B.2})$$

η 2^η βαθμωτή ταυτότητα του Green (Green's second scalar identity)

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_D (u \Delta_r v - v \Delta_r u) dV \quad (\text{III.B.3})$$

καθώς και ο ολοκληρωτικός τύπος

$$\int_{\partial D} \mathbf{n} u dS = \int_D \nabla u dV \quad (\text{III.B.4})$$

Για διανυσματικά πεδία αποδείχθηκαν: α) οι δύο μορφές της 1^{ης} διανυσματικής ταυτότητας του Green (Green's first vector identity)

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{E} \times \nabla_r \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\ = \int_D (\nabla_r \times \mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{H}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.B.5})$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \mathbf{H} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \nabla_r \cdot \mathbf{H}) dS \\ = \int_D \{ \mathbf{E} \cdot \Delta_r \mathbf{H} + \nabla_r \times \mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \mathbf{H} + \nabla_r \cdot \mathbf{E} \nabla_r \cdot \mathbf{H} \} dV \end{aligned} \quad (\text{III.B.6})$$

β) οι δύο μορφές της 2^{ης} διανυσματικής ταυτότητας του Green (Green's second vector identity)

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{H} \times \nabla_r \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \nabla_r \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\ = \int_D (\mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{E}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.B.7})$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \nabla_r \times \mathbf{H} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \nabla_r \cdot \mathbf{H} - \mathbf{n} \times \mathbf{H} \cdot \nabla_r \times \mathbf{E} \\ - \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \nabla_r \cdot \mathbf{E}) dS \\ = \int_D \{ \mathbf{E} \cdot \Delta_r \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \Delta_r \mathbf{E} \} dV \end{aligned} \quad (\text{III.B.8})$$

και γ) ο ολοκληρωτικός τύπος

$$\int_{\partial D} \mathbf{n} \times \mathbf{E} dS = \int_D \nabla \times \mathbf{E} dV \quad (\text{III.B.9})$$

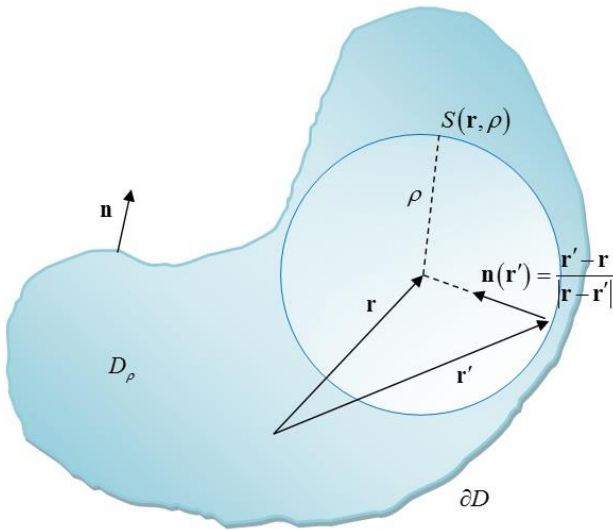
Γ. Εφαρμογές στη Σκέδαση

Μελετήθηκαν ορισμένα από τα βασικά εργαλεία της θεωρίας σκέδασης τα οποία προκύπτουν από τα προηγούμενα. Οργανώθηκαν, διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν με αναλυτικό τρόπο, χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες παραπομπές και σχήματα, τα θεωρήματα αναπαράστασης (representation theorems) ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (βλ. Κανδηλαναύτης, 2018).

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των ακουστικών κυμάτων εξετάστηκαν τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης. Για τα πρώτα μελετήθηκαν οι περιπτώσεις παρατήρησης: α) για το εσωτερικό

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}') \\ - \int_D \{ \Delta u(\mathbf{r}') + k^2 u(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \end{aligned} \quad (\text{III.Γ.1})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του Σχήματος III.Γ.1



Σχήμα III.Γ.1: Το εσωτερικό χωρίο D_ρ .

και που στην περίπτωση που ικανοποιείται επιπλέον η εξίσωση Helmholtz παίρνουμε τη σχέση (Helmholtz Representation)

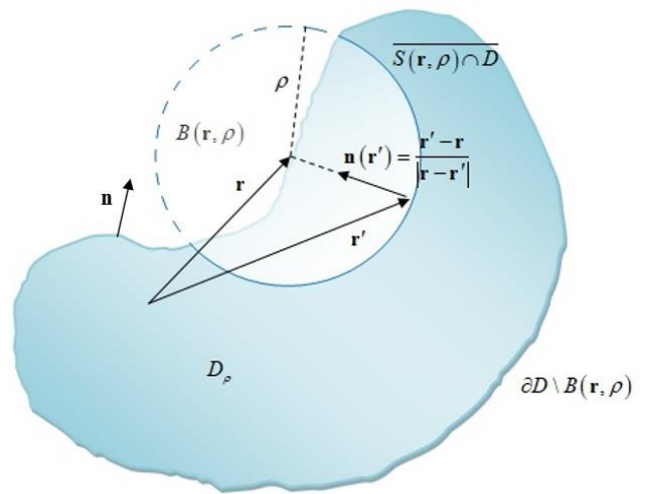
$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \quad (\text{III.Γ.2})$$

β) το σύνορο

$$u(\mathbf{r}) = 2 \left(\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}') - \int_D \{ \Delta u(\mathbf{r}') + k^2 u(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \right), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (\text{III.Γ.3})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του Σχήματος III.Γ.2 και που στην περίπτωση που ικανοποιείται επιπλέον η εξίσωση Helmholtz παίρνουμε τη σχέση

$$u(\mathbf{r}) = 2 \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (\text{III.Γ.4})$$



Σχήμα III.Γ.2: Το εσωτερικό χωρίο D_ρ για την περίπτωση του ∂D .

και γ) το εξωτερικό του χωρίου D

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}') - \int_D \{ \Delta u(\mathbf{r}') + k^2 u(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \in \bar{D} \quad (\text{III.Γ.5})$$

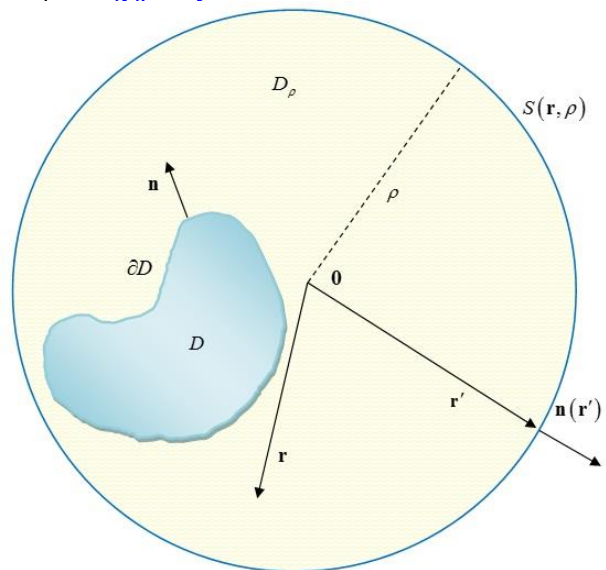
και που στην περίπτωση που ικανοποιείται επιπλέον η εξίσωση Helmholtz παίρνουμε τη σχέση

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right\} ds(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \notin \bar{D} \quad (\text{III.Γ.6})$$

Για τα θεωρήματα εξωτερικής αναπαράστασης ακουστικών κυμάτων μελετήθηκαν οι περιπτώσεις παρατήρησης: α) για το εξωτερικό

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left\{ u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (\text{III.Γ.7})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του Σχήματος III.Γ.3

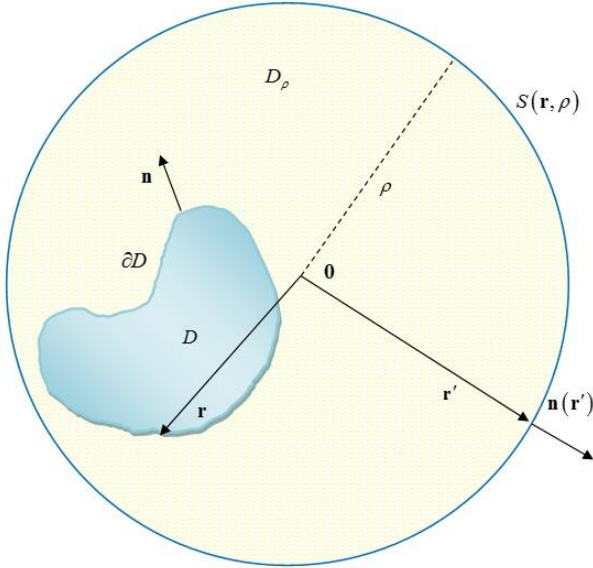


Σχήμα III.Γ.3: Το χωρίο D_ρ της εξωτερικής αναπαράστασης.

β) το σύνορο

$$u(\mathbf{r}) = 2 \int_{\partial D} \left\{ u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} - \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (\text{III.Γ.8})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.4](#)

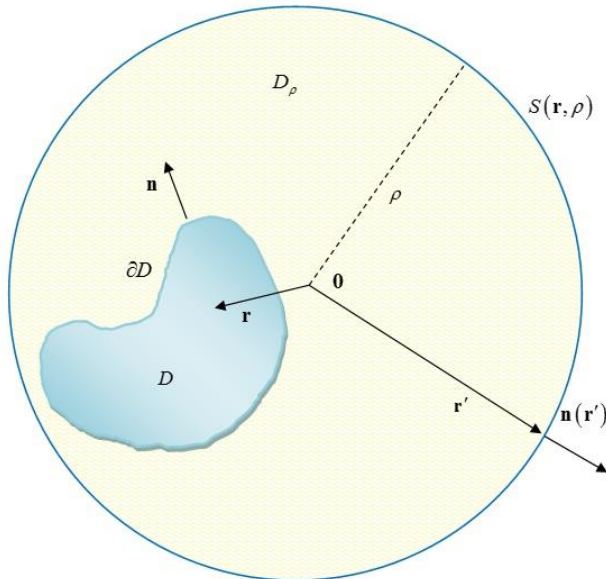


Σχήμα III.Γ.4: Το χωρίο D_ρ της εξωτερικής αναπαράστασης για το ∂D .

και γ) το εσωτερικό του χωρίου D

$$\int_{\partial D} \left\{ u(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} - \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \in D \quad (\text{III.Γ.9})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.5](#)



Σχήμα III.Γ.5: Το χωρίο D_ρ της εξωτερικής αναπαράστασης για το D .

Ανάλογα με τα ακουστικά για την περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εξετάστηκαν τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης. Για τα

θεωρήματα εσωτερικής αναπαράστασης μελετήθηκαν οι περιπτώσεις παρατήρησης: α) για το εσωτερικό

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ & - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ & + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \end{aligned} \quad (\text{III.Γ.10})$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ & - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ & + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \end{aligned} \quad (\text{III.Γ.11})$$

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.1](#) και που στην περίπτωση που ικανοποιούνται επιπλέον οι εξισώσεις Maxwell παίρνουμε τις σχέσεις (Stratton-Chu formulas)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \end{aligned} \quad (\text{III.B.12})$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in D \end{aligned} \quad (\text{III.B.13})$$

β) το σύνορο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2 \left(-\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right. \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ \left. + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \right), \\ \mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.14)

και

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 2 \left(-\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right. \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ \left. + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \right), \\ \mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.15)

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.2](#) και που στην περίπτωση που ικανοποιούνται επιπλέον οι εξισώσεις Maxwell παίρνουμε τις σχέσεις

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2 \left\{ -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right\}, \\ \mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.16)

και

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 2 \left\{ -\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right. \\ \left. - \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right\}, \quad \mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.17)

και γ) το εξωτερικό του χωρίου D

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = 0, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.18)

και

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ - ik \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') - ik \mathbf{E}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ - \nabla_{\mathbf{r}} \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ + ik \int_D \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') + ik \mathbf{H}(\mathbf{r}') \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = 0, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.19)

και που στην περίπτωση που ικανοποιούνται επιπλέον οι εξισώσεις Maxwell παίρνουμε τις σχέσεις

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.20)

και

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = 0, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.21)

Για τα θεωρήματα εξωτερικής αναπαράστασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μελετήθηκαν οι περιπτώσεις παρατήρησης: α) για το εξωτερικό

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ - \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.22)

και

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

(III.Γ.23)

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.3](#)

β) το σύνορο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2 \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right\},$$

$$\mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.24)

και

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 2 \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right\},$$

$$\mathbf{r} \in \partial D$$

(III.Γ.25)

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.4](#)

και γ) το εσωτερικό του χωρίου D

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in D$$

(III.Γ.26)

και

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{ik} \nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in D$$

(III.Γ.27)

με γραφική αναπαράσταση της αποδεικτικής διαδικασίας αυτή του [Σχήματος III.Γ.5](#).

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ασφαλώς και δεν χρειαζόταν η εργασία αυτή για να αναδειχθεί το μεγαλείο των θεωρημάτων των G-G-S. Όμως, δόθηκε η ευκαιρία να παρουσιαστούν εφαρμογές των θεωρημάτων αυτών με αναλυτικό τρόπο, με πλήρη ανάπτυξη αποδεικτικής και και συλλογιστικής διαδικασίας και με πολλαπλές παραπομπές σε άλλα θεωρήματα και τύπους (τα οποία αποδείχθηκαν ομοίως υποδειγματικά). Το συνολικό εγχείρημα συνοδεύτηκε από τις απαιτούμενες γεωμετρικές αναπαραστάσεις, οι οποίες βοηθούν στην κατανόηση του υπο εξέταση θέματος και στην οπτικοποίηση των εννοιών. Τα θεωρήματα ολοκληρωτικής αναπαράστασης των εμπλεκόμενων

πεδίων είναι μόνο η αρχή της εφαρμογής των θεωρημάτων των G-G-S στη Θεωρία Σκέδασης (Θ-Σ), αφού μέσα από αυτά ανοίγει ο δρόμος για περαιτέρω μελέτη. Τα θεωρήματα των G-G-S μαζί με τους ολοκληρωτικούς τύπους που προκύπτουν από αυτά διέπουν τη Θ-Σ στο σύνολό της.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Εκφράζω τις πιο θερμές ευχαριστίες μου στον Α' επιβλέποντα κ. Μπούκα Ανδρέα για την πολύτιμη συμβολή του στην εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας, χωρίς την οποία το αποτέλεσμα δεν θα ήταν το ίδιο.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Baker, S., Bird, M., Carty, J., Faulkner, D., & Swann, J. (1999). *Εγχειρίδιο Μεθοδολογίας* (Εξέλιξη του παιδιού στο κοινωνικό περιβάλλον). Πάτρα: Ε.Α.Π.
- Barkeshli, K. (2015). *Advanced Electromagnetics and Scattering Theory*. (S. Khorasani, Επιμ.) Switzerland: Springer International Publishing.
- Bollen, L. (2017). *Students' use of vector calculus in electrodynamics* (Doctoral Thesis). Belgium: KU Leuven.
- Bollen, L., van Kampen, P., & De Cock, M. (2015, November 2). *Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics*. PHYSICS EDUCATION RESEARCH, 11(2).
- Bollen, L., van Kampen, P., Baily, C., Kelly, M., & De Cock, M. (2017, August 16). *Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields*. PHYSICAL REVIEW PHYSICS EDUCATION RESEARCH, 13(2).
- Colton, D., & Kress, R. (1983). *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: Wiley.
- Colton, D., & Kress, R. (2013). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. New York: Springer Science+Business Media.
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics* (4th Edition εκδ.). Glenview Illinois: Pearson Education.
- Hay, G. E. (1953). *Vector and Tensor Analysis*. New York: Dover Publications.
- Kirsch, A., & Hettlich, F. (2015). *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations*. Cham: Springer International Publishing Switzerland.
- Schot, S. H. (1992). *Eighty Years of Sommerfeld's Radiation Condition*. Historia Mathematica, 19, σσ. 385-401.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Boston: Cengage Learning.
- Spiegel, M. R. (1959). *Vector Analysis And An Introduction To Tensor Analysis*. U.S.A.: McGraw-Hill.
- Stewart, J. (2012). *Calculus* (7th Edition εκδ.). Belmont: Brooks/Cole.
- Taylor, A. E., & Mann, R. W. (1983). *Advanced Calculus* (3rd Edition εκδ.). New York: John Wiley & Sons.
- Wilcox, C. H. (1956a). *A Generalization of Theorems of Rellich and Atkinson*. Proceedings of the American Mathematical Society, 7, σσ. 271-276.
- Wilcox, C. H. (1956b). *An Expansion Theorem for Electromagnetic Fields*. Communications on Pure and Applied Mathematic, 9, σσ. 115-134.
- Wilson, E. B., & Gibbs, J. W. (1901). *Vector Analysis: A Text-Book for the Use of Students of Mathematics & Physics*. Cambridge, U.S.A.: University Press, John Wilson and Son.
- Αθανασιάδης, Χ. (2015). *Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές*. Πάτρα: Ε.Α.Π.
- Δάσιος, Γ., & Κυριάκη, Κ. (1994). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα: Ιδίων.
- Κανδηλαναύτης, Χ. (2018). *Τα Θεωρήματα των Green, Gauss και Stokes στη Θεωρία Σκέδασης* (Διπλωματική Διατριβή). Διαθέσιμη στο αποθετήριο του Ε.Α.Π. <https://apothesis.eap.gr/handle/repo/37096>
- Καδιανάκης, Ν., Καρανάσιος, Σ., & Φελλούρης, Α. (2016). *Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών* (1η Έκδοση εκδ.). Αθήνα: Ιδίων.