

Χώροι Hilbert και Φασματική Θεωρία

Νεκτάριος Ντεγιαννάκης

Μεταπτ. Φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

nnte34@gmail.com, std101225@ac.eap.gr

Ανδρέας Μπούκας

Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

boukas.andreas@ac.eap.gr

Περίληψη – Το αντικείμενο της εργασίας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των Χώρων Hilbert, καθώς και η μελέτη του φάσματος των φραγμένων αυτοσυζυγών τελεστών, με πεδίο ορισμού ένα χώρο Hilbert.

Λέξεις-Κλειδιά: Συναρτησιακή Ανάλυση, Χώροι Hilbert, Αυτοσυζυγείς Τελεστές, Φασματική Θεωρία, Φασματικό Θεώρημα.

I. INTRODUCTION

Η μαθηματική έννοια του χώρου Hilbert πήρε το όνομα της από το θεμελιωτή της που ήταν ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert (1862-1943).

Ο όρος «Χώρος Hilbert» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον John Von Neumann (1903-1957).

Ο Hilbert γύρω στο 1909 αφοσιώθηκε στη μελέτη των μερικών διαφορικών και των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η έλλειψη ενός αυστηρού μαθηματικού πλαισίου γύρω από αυτές τις έννοιες, τον οδήγησε στο να εισάγει την έννοια ενός διανυσματικού χώρου ο οποίος δεν περιορίζεται μόνο σε πεπερασμένες διαστάσεις.

Αυτός ο διανυσματικός χώρος είναι ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου και έχει αρκετές ιδιότητες ανάλογες με τους Ευκλείδειους χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι χώροι Hilbert συναντώνται με φυσικό τρόπο κατά τη μελέτη διάφορων μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων.

Είναι απαραίτητα εργαλεία για την ανάπτυξη της θεωρίας επίλυσης των μερικών διαφορικών και των ολοκληρωτικών εξισώσεων, της ανάλυσης Fourier (η οποία περιλαμβάνει εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος και την μεταφορά θερμότητας), στην εργοδική θεωρία (η οποία αποτελεί την μαθηματική υπόσταση της θερμοδυναμικής).

Η θεωρία των χώρων Hilbert έχει κυρίαρχο ρόλο στην εξέλιξη του σύγχρονου τομέα της Φυσικής, της Κβαντομηχανικής.

II. Methodology

Το επιστημονικό πεδίο στο οποίο εντάσσεται η εργασία είναι η Συναρτησιακή Ανάλυση και η Θεωρία Μέτρου.

Ο βασικός κορμός της αποτελείται από δύο μέρη.

Το πρώτο έχει τίτλο: «Θεωρία των Χώρων Hilbert» με αντικείμενο:

- Την μελέτη των ιδιοτήτων των χώρων Hilbert και τη διερεύνηση της σχέσης τους με τους χώρους Banach.
- Την ανάδειξη των ομοιοτήτων των χώρων Hilbert με τους Ευκλείδειους μετρικούς χώρους.

- Την μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων σε χώρους Hilbert με έμφαση στις Προβολές.

- Την διερεύνηση για ύπαρξη βάσης σε ένα χώρο Hilbert. Το δεύτερο μέρος έχει τίτλο: «Φασματική Θεωρία» με αντικείμενο:

- Την ανάλυση της έννοιας του Φάσματος.
- Την μελέτη του Φάσματος των φραγμένων αυτοσυζυγών τελεστών ενός χώρου Hilbert H οι οποίοι έχουν πεδίο ορισμού όλο τον χώρο H .
- Την μελέτη των Θετικών τελεστών.
- Την ανάλυση των εννοιών της Φασματικής Ολοκλήρωσης και της Φασματικής Οικογένειας ενός φραγμένου αυτοσυζυγούς τελεστή.
- Την απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος.
- Την εφαρμογή της Φασματικής Θεωρίας στην εύρεση του Φάσματος ενός φραγμένου αυτοσυζυγούς τελεστή.

Στο παράρτημα της εργασίας πραγματεύονται οι έννοιες του μιγαδικού μέτρου και του ολοκληρώματος ως προς ένα τέτοιο μέτρο. Οι παραπάνω έννοιες είναι απαραίτητες ώστε, στο κύριο μέρος της εργασίας, να οριστούν οι έννοιες του Φασματικού Μέτρου και Φασματικού Ολοκληρώματος.

Η ανάπτυξη του θέματος βασίστηκε στη μελέτη των βιβλιογραφικών αναφορών, οι οποίες παρουσιάζονται στο τέλος της δημοσίευσης. Τα κύρια εγχειρίδια (με αλφαβητική κατάταξη) στα οποία βασίστηκε η εργασία, χωρίς να παραβλέπεται και η συνεισφορά των υπολοίπων στην επίλυση επιμέρους θεμάτων, ήταν τα εξής:

Avner Friedman - *Foundations of Modern Analysis* - Dover Publications (2010)

P. R. Halmos - *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*- Chelsea Pub Co (1951)

P. R. Halmos - *Measure Theory* - Springer (1974)

Carlos S. Kubrusly - *Essentials of Measure Theory* - Springer (2015)

Kosaku Yosida - *Functional Analysis* - Springer (1988)

III. Selected Results

Οι χώροι Hilbert, όπως και οι χώροι Banach είναι πλήρεις διανυσματικοί χώροι. Η διαφορά τους είναι ότι οι πρώτοι είναι χώροι εσωτερικού γινομένου, ενώ οι δεύτεροι είναι χώροι με νόρμα.

Αποδεικνύεται ότι ένας χώρος Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$, είναι και χώρος Banach με την νόρμα $\| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ένας χώρος Banach $(V, \| \cdot \|)$, ο οποίος ικανοποιεί τον νόμο του παραλληλογράμμου, είναι

και χώρος Hilbert αν εφοδιαστεί με ένα εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$, για το οποίο ισχύει ότι:
 $(x, x) = \|x\|^2$, για κάθε $x \in V$.

Ένα τέτοιο εσωτερικό γινόμενο δίνεται από την σχέση:

$$(x, y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] + \frac{1}{4}i[\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2], x, y \in V.$$

Η εισαγωγή ενός εσωτερικού γινομένου σε ένα διανυσματικό χώρο επιτρέπει να οριστεί η έννοια της ορθογωνιότητας των στοιχείων του, καθώς και οι έννοιες του ορθογώνιου συμπληρώματος ενός υποχώρου όπως και της προβολής των στοιχείων του χώρου πάνω σε ένα κλειστό υποχώρο του.

Η γεωμετρική διαίσθηση παίζει σημαντικό ρόλο σε αρκετές πτυχές της θεωρίας των χώρων Hilbert. Αποτελέσματα της γραμμικής άλγεβρας που αφορούν Ευκλείδειους χώρους δύο ή τριών διαστάσεων, όπου μπορεί να σχηματιστεί μια εποπτική εικόνα, επεκτείνονται με ένα φυσικό τρόπο και στους χώρους Hilbert. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η έννοια της ορθογώνιας προβολής. Στην γραμμική άλγεβρα η εύρεση της ορθογώνιας προβολής ενός στοιχείου διανυσματικού χώρου πάνω σε ένα υποχώρο του είναι απαραίτητη για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ειδικότερα: Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε η εξίσωση $Ax = b$, με $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, έχει λύση αν και μόνο αν το $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ανήκει στο χώρο των στηλών του πίνακα A .

Αν το $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ δεν ανήκει στο χώρο των στηλών του πίνακα A τότε μπορεί να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος αντικαθιστώντας στην εξίσωση το b με ένα διάνυσμα του χώρου των στηλών το οποίο είναι το πλησιέστερο στο b . Αυτό δεν είναι άλλο από την ορθογώνια προβολή του b πάνω στον χώρο των στηλών του πίνακα A .

Η ύπαρξη και μοναδικότητα της προβολής στοιχείου ενός χώρου Hilbert πάνω σε ένα κλειστό υποχώρο του εξασφαλίζεται από το **Θεώρημα των Προβολών**, σύμφωνα με το οποίο, ισχύει ότι:

Έστω H ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός υποχώρος του H . Τότε, για κάθε στοιχείο $x_0 \in H$, υπάρχουν στοιχεία $y_0 \in M$ και $z_0 \in M^\perp$ για τα οποία ισχύει ότι $x_0 = y_0 + z_0$. Επιπλέον αυτή η ανάλυση γίνεται με μοναδικό τρόπο.

Μια συνέπεια του Θεωρήματος των Προβολών είναι ότι:

Αν το M είναι ένας κλειστός υποχώρος χώρου Hilbert H , τότε ισχύει ότι: $H = M \oplus M^\perp$.

Μια σημαντική οικογένεια τελεστών σε ένα χώρο Hilbert είναι η οικογένεια των Προβολών. Τα στοιχεία αυτής της οικογένειας ορίζονται μέσω του Θεωρήματος των Προβολών με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω H ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός υποχώρος του.

Σύμφωνα με το Θεώρημα των Προβολών κάθε στοιχείο $x \in H$ μπορεί να γραφεί με ένα και μόνο τρόπο στην μορφή: $x = y + z$, όπου $y \in M$ και $z \in M^\perp$. Το στοιχείο y ονομάζεται προβολή (projection) του x στον M .

Ο τελεστής $P_M: H \rightarrow M$ με τύπο $P_M(x) = y$ ονομάζεται **προβολή του H στον M** .

Όπως αποδεικνύεται κάθε Προβολή είναι ένας γραμμικός, φραγμένος και αυτοσυζυγής τελεστής.

Η έννοια της βάσης, όπως αυτή είναι γνωστή για τους Ευκλείδειους χώρους πεπερασμένης διάστασης επεκτείνεται σε χώρους Hilbert ακόμα και αν αυτοί δεν είναι πεπερασμένης διάστασης. Ο αντίστοιχος ορισμός είναι:

Έστω H ένας χώρος Hilbert και K ένα υποσύνολο του H . Το σύνολο K ονομάζεται ορθοκανονική βάση του H (orthonormal basis of H) αν ισχύουν οι ιδιότητες:

- Το σύνολο K είναι ορθοκανονικό σύνολο.
- Κάθε $x \in H$ γράφεται στην μορφή:
 $x = \sum_{y \in K_x} (x, y)y$, με $K_x = \{y \in K \mid (x, y) \neq 0\}$.

Με χρήση του Λήμματος του Zorn αποδεικνύεται ότι κάθε μη τετριμμένος χώρος Hilbert έχει τουλάχιστον μια ορθοκανονική βάση.

Αν επιπλέον ο χώρος είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε ορθοκανονική βάση θα είναι αριθμήσιμη.

Επομένως κάθε διαχωρίσιμος, μη πεπερασμένος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισομόρφος με τον χώρο των ακολουθιών ℓ_2 .

Το δεύτερο τμήμα της εργασίας έχει τίτλο «Φασματική Θεωρία». Σκοπός της φασματικής θεωρίας είναι η διάκριση των τιμών $\lambda \in \mathbb{C}$ για τις οποίες ορίζεται ο αντίστροφος του τελεστή $T_\lambda = \lambda I - T$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής και $T: D(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ ένας γραμμικός τελεστής, με πεδίο $D(T)$ και εικόνα $\mathcal{R}(T)$ τα οποία ανήκουν στον ίδιο μιγαδικό γραμμικό τοπολογικό χώρο X . Η φασματική θεωρία ασχολείται επίσης με τη μελέτη του αντιστρόφου του T_λ , όταν αυτός υπάρχει.

Οι γραμμικοί τελεστές χωρίζονται σε δύο κύριες κλάσεις: τους φραγμένους και τους μη φραγμένους.

Ο τελεστής T του χώρου $(V, \|\cdot\|)$ λέγεται ότι είναι φραγμένος, αν υπάρχει $m \geq 0$ ώστε για κάθε $x \in V$ να ισχύει ότι: $\|Tx\| \leq m\|x\|$. Το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών του V συμβολίζεται με $\mathcal{B}(V)$.

Αποδεικνύεται ότι ένας γραμμικός τελεστής είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

Επιμέρους κατηγορίες κάθε κλάσης είναι οι εξής:

Οι κανονικοί, (normal operators), που είναι τελεστές οι οποίοι αντιμετατίθενται με τον συζυγή τους, οι κανονικοί τελεστές οι οποίοι είναι και αντιστρέψιμοι, (unitary operators) και οι αυτοσυζυγείς τελεστές, (self-adjoint operators).

Στην εργασία γίνεται μελέτη του φάσματος των φραγμένων γραμμικών, αυτοσυζυγών τελεστών ενός χώρου Hilbert H για τους οποίους ισχύει ότι $D(T) = H$.

Αυτή η κατηγορία τελεστών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς τέτοιοι τελεστές εμφανίζονται σε αρκετά προβλήματα διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων και έχουν αρκετές ιδιότητες που είναι ανάλογες με τις ιδιότητες των συμμετρικών και των ερμιτιανών πινάκων, όπως αυτές είναι γνωστές από την γραμμική άλγεβρα.

Ακολουθούν οι βασικοί ορισμοί Φασματικής Θεωρίας.

Σε αυτούς τους ορισμούς ο χώρος $(V, \|\cdot\|)$, είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$, και ο T ένας γραμμικός τελεστής του V :

Επιλύον σύνολο $\rho(T)$ του T , (resolvent set of T), είναι το υποσύνολο των μιγαδικών που περιέχει όλους τους αριθμούς λ που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

- Ο τελεστής $\lambda I - T$ έχει αντίστροφο.

- Το πεδίο τιμών του $\lambda\mathbb{I} - T$ είναι πυκνό στον V .
- Ο αντίστροφος του $\lambda\mathbb{I} - T$ είναι φραγμένος στο σύνολο $\mathcal{R}(\lambda\mathbb{I} - T)$.

Φάσμα $\sigma(T)$ του T , (spectrum of T), είναι το συμπλήρωμα του $\rho(T)$.

Μια διαμέριση του φάσματος σε τρία, ανά δύο ξένα υποσύνολα των μιγαδικών αριθμών αποτελείται από τα παρακάτω:

Συνεχές φάσμα $\sigma_c(T)$ του T , (continuous spectrum of T), είναι το υποσύνολο των μιγαδικών που περιέχει όλους τους αριθμούς λ για τους οποίους ικανοποιούνται οι ιδιότητες:

- Το πεδίο τιμών του $\lambda\mathbb{I} - T$ είναι πυκνό στον V .
- Ο τελεστής $(\lambda\mathbb{I} - T)^{-1}$ υπάρχει αλλά δεν είναι φραγμένος στο σύνολο $\mathcal{R}(\lambda\mathbb{I} - T)$.

Υπολειπόμενο φάσμα $\sigma_r(T)$ του T , (residual spectrum of T), είναι το υποσύνολο των μιγαδικών που περιέχει όλους τους αριθμούς λ για τους οποίους ικανοποιούνται οι ιδιότητες:

- Ορίζεται ο τελεστής $(\lambda\mathbb{I} - T)^{-1}$ και είναι φραγμένος στο σύνολο $\mathcal{R}(\lambda\mathbb{I} - T)$.
- Το πεδίο τιμών του $\lambda\mathbb{I} - T$ δεν είναι πυκνό στον V .

Σημειακό φάσμα $\sigma_p(T)$ του T , (point spectrum of T), είναι το υποσύνολο των μιγαδικών που περιέχει όλους τους αριθμούς λ για τους οποίους ο $\lambda\mathbb{I} - T$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Κάθε στοιχείο του σημειακού φάσματος ονομάζεται **ιδιοτιμή** του T , (eigenvalue of T) και κάθε στοιχείο $x \in V \setminus \{0\}$ για το οποίο $Tx = \lambda x$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα**, (eigenvector), που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Αποδεικνύεται ότι:

- α) Σε κάθε μη τετριμμένο χώρο Hilbert H , και για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$, το επιλύον σύνολο καθώς και το φάσμα του τελεστή δεν μπορεί να είναι ίσα με το κενό σύνολο.
- β) Αν ο τελεστής T είναι κάτω φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $x \in H$ ισχύει ότι $\|Tx\| \geq c\|x\|$, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός δεν έχει συνεχές φάσμα.
- γ) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και είναι αυτοσυζυγής, τότε δεν έχει υπολειπόμενο φάσμα. Επίσης το φάσμα του περιέχεται σε κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m, M είναι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι ονομάζονται αντίστοιχα κάτω και άνω φράγμα του τελεστή. Αυτοί, είναι αντίστοιχα το $\inf$ και το $\sup$ του συνόλου $\{(Ax, x) : x \in H, \|x\| = 1\}$ και είναι τιμές του φάσματος.

Για να οριστεί το Φασματικό Ολοκλήρωμα μιας φραγμένης μιγαδικής συνάρτησης ως προς ένα φασματικό μέτρο πρέπει να προηγηθούν: η ανάλυση της έννοιας του φασματικού μέτρου και στην συνέχεια, μέσω αυτού, ο ορισμός ενός μιγαδικού μέτρου και του ολοκληρώματος ως προς το μέτρο αυτό.

Έστω $\mathcal{P}(H)$ των σύνολο των προβολών ενός χώρου Hilbert H και $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ μια σ -Αλγεβρα των μιγαδικών αριθμών.

Η απεικόνιση $E: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ είναι **Φασματικό Μέτρο** του H , αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες:

- $E(\mathbb{C}) = \mathbb{I}$, όπου $\mathbb{I}$ ο ταυτοτικός τελεστής του H .

- Για κάθε ακολουθία $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$, ανά δύο ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$, ισχύει ότι: $E(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} E(A_j)$, όπου $\sum_{j=1}^{\infty} E(A_j)$ είναι το όριο, ως προς τη νόρμα του H , της ακολουθίας $\sum_{j=1}^n E(A_j)$, όταν το n τείνει στο άπειρο.

Αν η απεικόνιση $E: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ είναι φασματικό μέτρο του χώρου H , τότε για κάθε υποσύνολο $M \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ και για κάθε $x, y \in H$ η συνάρτηση $\mu: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, με τύπο $\mu(M) = (E(M)x, y)$ ορίζει ένα μιγαδικό μέτρο.

Το δυναμοσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι μια σ -Αλγεβρα του $\mathbb{C}$, οπότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και για κάθε $x, y \in H$, η απεικόνιση $\mu_{x,y}(\{\lambda\}) = (E(\lambda)x, y)$ ορίζει ένα μιγαδικό μέτρο, όπου $E(\lambda) = E(\{\lambda\})$. Επομένως:

Αν η $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι φραγμένη, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int f(\lambda) d(E(\lambda)x, y)$.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Έστω $E: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ φασματικό μέτρο του χώρου Hilbert H , όπου $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ το δυναμοσύνολο του $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικός τελεστής A του H για τον οποίο, για κάθε $x, y \in H$, ισχύει ότι: $(Ax, y) = \int f(\lambda) d(E(\lambda)x, y)$.

Ο τελεστής A , του παραπάνω θεωρήματος, ονομάζεται **Φασματικό Ολοκλήρωμα** της f ως προς το φασματικό μέτρο E και συμβολικά γράφεται ότι $A = \int f(\lambda) dE_{\lambda}$.

Στο τελευταίο τμήμα της εργασίας αποδεικνύεται το Φασματικό Θεώρημα των φραγμένων, γραμμικών και αυτοσυζυγών τελεστών ενός χώρου Hilbert και παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές του. Των παραπάνω, προηγείται η ανάλυση της έννοιας της διάταξης μεταξύ των στοιχείων αυτής της κλάσης τελεστών, καθώς και της έννοιας της Φασματικής Οικογένειας ενός τέτοιου τελεστή:

Έστω $A, B \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγείς τελεστές ενός χώρου Hilbert H .

- Ο τελεστής A είναι θετικός, αν για κάθε $x \in H$, ισχύει η ιδιότητα $(Ax, x) \geq 0$. Συμβολικά γράφεται ότι $A \geq 0$.
- Ο τελεστής A θα λέγεται ότι είναι μεγαλύτερος του B , και γράφεται ότι $A \geq B$ ή $B \leq A$, αν ο τελεστής $A - B$ είναι θετικός.

Μια οικογένεια προβολών $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ του χώρου Hilbert H ονομάζεται **Φασματική Οικογένεια Προβολών** αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες:

- Αν $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ και $\nu < \mu$, τότε $E_{\nu} \leq E_{\mu}$.
- Κάθε στοιχείο της οικογένειας $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ είναι ισχυρά συνεχές από αριστερά.
- Υπάρχουν m, M με $-\infty < m < M < +\infty$ για τα οποία ισχύει ότι $E_{\lambda} = \mathbf{0}$ αν $\lambda < m$ και $E_{\lambda} = \mathbb{I}$ αν $\lambda > M$. Οι πραγματικοί αριθμοί m, M ονομάζονται αντίστοιχα κάτω και άνω φράγμα της φασματικής οικογένειας.

Το ολοκλήρωμα ως προς μια φασματική οικογένεια ορίζεται μέσω ενός ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes:

Έστω μια φασματική οικογένεια $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ με φράγματα m, M και έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [m, M] \rightarrow \mathbb{C}$.

Η συνάρτηση f επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στο διάστημα $[m, M + 1]$ και η επέκταση συμβολίζεται ξανά με f . Έστω σταθερό $\varepsilon \in (0, 1)$ και P μια διαμέριση του $[m, M + \varepsilon]$ με στοιχεία $\lambda_j, j = 0, \dots, n$, τέτοια ώστε:

$$m = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M + \varepsilon.$$

Με $|P|$ συμβολίζεται το $\max_{k=1, \dots, n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})$.

Για κάθε $k = 1, \dots, n$ επιλέγεται ένα $\mu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$.

Σχηματίζεται το άθροισμα:

$$S_{\Pi} = \sum_{k=1}^n f(\mu_k)(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}).$$

Αποδεικνύεται ότι όταν $|\Pi| \rightarrow 0$, το S_{Π} συγκλίνει σε ένα τελεστή S του χώρου $\mathcal{B}(H)$, ανεξάρτητα από την επέκταση της f , την επιλογή του ε , την διαμέριση Π και την επιλογή των σημείων μ_k .

Ο τελεστής $S \in \mathcal{B}(H)$ ονομάζεται ολοκλήρωμα της f ως προς την φασματική οικογένεια $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Συμβολικά γράφεται: $S = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda) dE_{\lambda}$.

Ακολουθεί το **Φασματικό Θεώρημα**:

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής του χώρου Hilbert H , με φράγματα m, M . Τότε υπάρχει μοναδική φασματική οικογένεια προβολών $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- Αν ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής αντιμετωπίζεται με τον A , τότε αντιμετωπίζεται και με τον E_{λ} , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in H$: υπάρχει το $E_{\mu+0}x := \lim_{h \rightarrow 0^+} E_{\mu+h}x$.

- Ο τελεστής A δίνεται από την σχέση: $A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda}$, όπου $\varepsilon \in (0,1)$.

Αυτή η οικογένεια ονομάζεται **Φασματική Οικογένεια του τελεστή A** .

Συνέπειες του φασματικού θεωρήματος είναι τα παρακάτω:

- Ο αριθμός $\lambda_0 \in (m, M)$ είναι στοιχείο του συνόλου $\rho(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq (m, M)$ για το οποίο ισχύει ότι $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$, για οποιαδήποτε στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2 \in (a, b)$.

- Ο αριθμός $\lambda_0 \in [m, M]$ είναι ιδιτιμή αν και μόνο αν η E_{λ} δεν είναι συνεχής από δεξιά στο λ_0 .

- Αν ο αριθμός $\lambda_0 \in [m, M]$ είναι ιδιτιμή τότε ο αντίστοιχος ιδιοχώρος θα είναι ίσος με τον υποχώρο $M_{\lambda_0+0} \setminus M_{\lambda_0}$, όπου $M_{\lambda_0+0}, M_{\lambda_0}$ είναι οι αντίστοιχοι κλειστοί υποχώροι των προβολών $E_{\lambda_0+0}, E_{\lambda_0}$.

IV. Conclusions

Παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της φασματικής θεωρίας:

Έστω ο χώρος Hilbert $H = L_2([0,1])$, των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με εσωτερικό γινόμενο: $(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$, όπου $f, g \in L_2([0,1])$.

Ορίζεται ο τελεστής $A: L_2([0,1]) \rightarrow L_2([0,1])$ με τύπο $A(f)(x) = xf(x)$.

Αποδεικνύεται ότι ο A είναι φραγμένος, γραμμικός και αυτοσυζυγής τελεστής του χώρου H και έχει φράγματα $m = 0, M = 1$.

Ο τελεστής έχει την παρακάτω φασματική οικογένεια:

$$E_{\lambda}(f)(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \lambda \in (-\infty, 0] \\ X(x) \cdot f(x) & , \lambda \in (0,1] \\ f(x) & , \lambda \in [1, +\infty) \end{cases},$$

όπου $X(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[0, \lambda]$.

Τα παρακάτω προκύπτουν από εφαρμογή της φασματικής θεωρίας:

- Η φασματική οικογένεια του τελεστή A δεν παρουσιάζει ασυνέχεια από δεξιά σε κανένα σημείο του διαστήματος $[0,1]$. Επομένως ο A δεν έχει ιδιοτιμές.

- Η φασματική οικογένεια του τελεστή A δεν είναι σταθερή σε κανένα ανοικτό διάστημα που είναι υποσύνολο του $(0,1)$. Επομένως κανένα στοιχείο του $(0,1)$ δεν ανήκει στο σύνολο $\rho(A)$. Οπότε, ισχύει ότι $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ και το συνεχές φάσμα είναι ίσο με το $[0,1]$.

- Ισχύει ότι: $A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda}$. Πράγματι:

Έστω $f \in L_2([0,1])$ και ένα σταθερό $x \in [0,1]$.

Έστω μια διαμέριση Π του $[0,1 + \varepsilon]$ τέτοια ώστε:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{\mu-1} < x = \lambda_{\mu} < \dots < \lambda_{\mu+\nu} = 1 + \varepsilon$$

Ισχύει ότι: $\left(\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda} \right) (f)(x) =$

$$= \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{\lambda_k}(f)(x) - E_{\lambda_{k-1}}(f)(x)) =$$

$$= \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu-1} \lambda_k (E_{\lambda_k}(f)(x) - E_{\lambda_{k-1}}(f)(x)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\mu}^{\mu+\nu} \lambda_k (E_{\lambda_k}(f)(x) - E_{\lambda_{k-1}}(f)(x)) \right\}.$$

Όμως για $\lambda < x$ ισχύει ότι $E_{\lambda}(f)(x) = \mathbf{0}$, οπότε:

$$\sum_{k=1}^{\mu-1} \lambda_k (E_{\lambda_k}(f)(x) - E_{\lambda_{k-1}}(f)(x)) = \mathbf{0}.$$

Ενώ για $\lambda \geq x$ ισχύει ότι $E_{\lambda}(f)(x) = \mathbb{I}$, οπότε:

$$\sum_{k=\mu}^{\mu+\nu} \lambda_k (E_{\lambda_k}(f)(x) - E_{\lambda_{k-1}}(f)(x)) =$$

$$= \lambda_{\mu} (E_{\lambda_{\mu}}(f)(x) - E_{\lambda_{\mu-1}}(f)(x)) =$$

$$= x(\mathbb{I}(f)(x) - \mathbf{0}(f)(x)) = xf(x) = A(f)(x).$$

Επομένως: $\left(\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda} \right) (f)(x) = A(f)(x)$.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πολλές ευχαριστίες, στον κ. Ανδρέα Μπούκα για την εμπιστοσύνη και την πολύτιμη καθοδήγηση, καθώς και στον κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο που ως β' αξιολογητής με τίμησε με την θετική του γνώμη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Haim Brezis - *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*-Springer - Verlag New York (2010)
- Neal L. Carothers - *Real Analysis* - Cambridge University Press (2000)
- Lokenath Debnath, Piotr Mikusinski - *Introduction to Hilbert spaces with applications*-Academic Press (2005)
- Avner Friedman - *Foundations of Modern Analysis* - Dover Publications (2010)
- P.R. Halmos - *A Hilbert Space Problem Book* - Springer (1982)
- P. R. Halmos - *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*-Chelsea Pub Co (1951)
- P. R. Halmos - *Measure Theory* - Springer (1974)
- Joseph Muscat - *Functional analysis. An introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras* - Springer (2014)
- Carlos S. Kubrusly - *Essentials of Measure Theory* - Springer (2015)
- Inder K. Rana - *An Introduction to Measure and Integration* - AMS (2002)

- J. Tinsley Oden, Leszek Demkowicz - *Applied Functional Analysis* - Chapman and Hall-CRC (2010)
- Yutaka Yamamoto - *From vector spaces to function spaces, Introduction to functional analysis with applications* - SIAM (2012)
- Kosaku Yosida - *Functional Analysis* - Springer (1988)
- Elias M. Stein, Rami Shakarchi - *Real Analysis, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces (Princeton Lectures in Analysis) (Book. 3)* - Princeton University (2005)
- Α. Γιαννόπουλος - *Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου* - ΕΚΠΑ (2013)
- Θ. Μήτσης - *Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου* - Πανεπιστήμιο Κρήτης