

Δημιουργία Συνδέσμων στην Ασαφή Λογική

Φώτης Πατενίδης

Καθηγητής Μαθηματικών και Μεταπτ. Φοιτητής
ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

fotipate@gmail.com, std123466@ac.eap.gr

Βασίλειος Παπαδόπουλος

Καθηγητής Μαθηματικών Πολιτικών Μηχανικών
Ξάνθης και Μέλος ΣΕΠ ΣΘΕΤ ΕΑΠ

papadob@civil.duth.gr

Περίληψη – Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθούν καινοτόμες μέθοδοι δημιουργίας ασαφών λογικών συνδέσμων, είτε κάνοντας χρήση προυπαρχόντων συνδέσμων, είτε χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες.

Λέξεις-Κλειδιά: Ασαφής Λογική, Ασαφείς Σύνδεσμοι, Τριάδες De Morgan, Ασαφής Σύζευξη, Ασαφής Διάζευξη, Ασαφής Συνεπαγωγή

I. INTRODUCTION

Αν η λογική στη ζωή του ανθρώπου είναι αναγκαία, τότε οι λογικές πράξεις αποτελούν μία ανάγκη. Με τον Αριστοτέλη (300 π.Χ.) ως πρωτεργάτη, ο οποίος εισήγαγε τη θεωρία της σκέψης για τη σκέψη, έχουμε το πρώτο λογικό σύστημα, όπου συναντάμε μονοσήμαντα ορισμένες λογικές πράξεις (σύζευξη, διάζευξη, άρνηση, συνεπαγωγή). Με αυτό το λογικό σύστημα θα ταυτιστεί η καθολική ανθρώπινη λογική για περίπου δύο χιλιετίες. Με τη ριζοσπαστική εισήγηση του Lofti Zadeh (1965), εξαιρώντας το νόμο του αποκλειόμενου τρίτου, γεννάται ένα νέο μοντέλο πλειοψηφίας λογικής, η ασαφής λογική, που καθιστά την κλασική λογική ως μια ειδική της περίπτωση. Σε αυτό το Ιντουισιονιστικό μοντέλο η ασάφεια δεν καταπολεμάται ως εχθρός, αλλά χρησιμοποιείται ως συνεργάτης, αφού πρώτα έχουμε αποδεχθεί την αδυναμία του ανθρώπου για απόλυτη ακρίβεια στην πραγματική ζωή. Αυτό δηλώνει και η φράση του Albert Einstein «Μέχρι τώρα οι νόμοι των μαθηματικών που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα δεν είναι ακριβείς. Και ως τώρα, όσο πιο ακριβείς είναι τόσο λιγότερο ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα». Εκτός της δυνατότητας για διάφορες τιμές αλήθειας, που παρέχει αυτό το μοντέλο, ένα άλλο πλεονέκτημα είναι η χρήση διαφόρων λογικών πράξεων, διαφορετικών από αυτές της κλασικής λογικής, που προσφέρουν ευελιξία και ευκολία στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Με κάθε τέτοιο πακέτο λογικών πράξεων (τριάδες De Morgan), δημιουργείται ένα καινούργιο λογικό σύμπαν. Αποκτούμε έτσι τη δυνατότητα να λύσουμε το κατεξοχήν πρόβλημα σε κάθε ένα από αυτά τα σύμπαντα που δημιουργούνται και να επιλέξουμε την πιο ικανοποιητική λύση.

II. Methodology

Η διπλωματική μου εργασία εντάσσεται στο επιστημονικό πεδίο της ασαφούς λογικής.

Το αντικείμενο της μελέτης και έρευνας στην εν λόγω εργασία, επικεντρώνετε στην δημιουργία καινοτόμων γεννητριών ασαφών συνδέσμων και χωρίζεται σε τρία κυρίως μέρη-κεφάλαια.

1) Στο πρώτο μέρος με τίτλο: «Εισαγωγή στην ασαφή λογική» το κεντρικό αντικείμενο είναι μελέτη των βασικών εννοιών του κλάδου της ασαφούς λογικής:

- Ασαφή σύνολα.
- Ασαφείς αριθμοί.
- Λογικές πράξεις σε ασαφή σύνολα.
- Τριάδες De Morgan.

2) Το δεύτερο μέρος έχει τίτλο: «Δημιουργία νέων ασαφών λογικών συνδέσμων» με αντικείμενο:

- Την δημιουργία και απόδειξη εγκυρότητας, των καινοτόμων ασαφών συνδέσμων.
- Τη μελέτη της συμπεριφοράς τους για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου k .
- Την παραγωγή των αντίστοιχων τριάδων De Morgan καθώς και των αντίστοιχων συνεπαγωγών.

3) Το τρίτο και τελευταίο μέρος, με τίτλο «Δημιουργία νέων ασαφών συνεπαγωγών» κάνοντας χρήση συνεπαγωγών που προκύπτουν από τις τριάδες De Morgan του δευτέρου κεφαλαίου, με αντικείμενο:

- Την δημιουργία Αμοιβαίων ασαφών συνεπαγωγών.
- Την δημιουργία αντιθετο αντίστροφων ασαφών συνεπαγωγών.
- Τον συνδυασμό ασαφών συνεπαγωγών με λειτουργία $\min$ και $\max$.
- Τον συνδυασμό των ασαφών συνεπαγωγών με λειτουργία της κυρτότητας

Για την μελέτη και ανάπτυξη της εργασίας μελετήθηκαν οι βιβλιογραφικές αναφορές που παρουσιάζονται στο τέλος της δημοσίευσης. Παραθέτω τα κυριότερα από αυτά αλφαβητικά:

[1] Kacprzyk, J. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 295, 2013.

[2] Klir, George, and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Vol. 4. New Jersey: Prentice hall, 1995.

[3] Zimmermann, Hans-Jürgen. *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media, 2011.

III. Selected Results

Για να επιτευχθεί η όσο το δυνατό βαθύτερη κατανόηση των μεθόδων που ακολουθούν, θα αναφερθούν αρχικά οι ορισμοί των βασικών εννοιών στην ασαφή λογική και κυρίως στους ασαφείς συνδέσμους.

Οι βασικοί λογικοί σύνδεσμοι που θα μελετήσουμε είναι οι τρεις που απαρτίζουν μία τριάδα De Morgan, δηλαδή, το ασαφές συμπλήρωμα (άρνηση), η ασαφής σύζευξη (τομή) και η ασαφής διάζευξη (ένωση), καθώς επίσης και η ασαφής συνεπαγωγή. Θα δούμε τώρα τα βασικά αξιώματα που διέπουν την κάθε μία από αυτές.

A. Βασικοί Ορισμοί Ασαφών Συνδέσμων:

Ασαφές συμπλήρωμα (Fuzzy complement). Ο λογικός σύνδεσμος του συμπληρώματος στην ασαφή λογική είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής, $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο στο συμπληρωματικό του, πληρώντας τα παρακάτω αξιώματα (βλ. Klir, George, and Bo Yuan [1] σελ.51):

(N1) $N(0) = 1$, $N(1) = 0$, (οριακές συνθήκες)

(N2) Η συνάρτηση $N(x)$ είναι φθίνουσα (μονοτονία)

(N3) Η συνάρτηση $N(x)$ είναι συνεχής

(N4) $N(N(a)) = a$ για κάθε $a \in [0,1]$

Ασαφής σύζευξη (Fuzzy intersection, t-norms). Η ασαφής σύζευξη είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία ικανοποιεί τα εξής τέσσερα βασικά αξιώματα (βλ. Klir, George, and Bo Yuan [1] σελ.61):

(T1) $T(a, 1) = a$ (οριακή συνθήκη)

(T2) Για κάθε $a, b, c, d \in [0,1]$ αν $a \leq c$ και $b \leq d$ τότε $T(a, b) \leq T(c, d)$ (μονοτονία)

(T3) $T(a, b) = T(b, a)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(T4) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Ασαφής διάζευξη (Fuzzy union, t-conorm). Η ασαφής διάζευξη είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής $U: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία ικανοποιεί τέσσερα βασικά αξιώματα, ομοίως με την ασαφή σύζευξη, με μόνη διαφορά την οριακή συνθήκη, αυτά είναι (βλ. Klir, George, and Bo Yuan [1] σελ.76):

(U1) $U(a, 0) = a$ (οριακή συνθήκη)

(U2) Για κάθε $a, b, c, d \in [0,1]$ αν $a \leq c$ και $b \leq d$ τότε $U(a, b) \leq U(c, d)$ (μονοτονία)

(U3) $U(a, b) = U(b, a)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(U4) $U(a, U(b, c)) = U(U(a, b), c)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Ασαφής Συνεπαγωγή (Fuzzy Implication). Η ασαφής συνεπαγωγή είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής $J: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ η οποία πρέπει να ικανοποιεί κατά το μέγιστο τα εννέα παρακάτω βασικά αξιώματα. Αυτά είναι τα εξής (βλ. Β. Παπαδόπουλου, Γ. Μποτζώρη [2] σελ.46):

(J1) Αν $a \leq b$ συνεπάγεται ότι $J(a, x) \geq J(b, x)$

(μονοτονία ως προς την πρώτη μεταβλητή)

(J2) Αν $a \leq b$ συνεπάγεται ότι $J(x, a) \leq J(x, b)$

(μονοτονία ως προς την δεύτερη μεταβλητή)

(J3) $J(0, a) = 1$ (κυριαρχία του ψεύδους)

(J4) $J(1, b) = b$ (ουδετερότητα της αλήθειας)

(J5) $J(a, a) = 1$ (ταυτότητα)

(J6) $J(a, J(b, c)) = J(J(a, b), c)$ (ιδιότητα της αλλαγής)

(J7) $J(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b$ (συνοριακή συνθήκη)

(J8) $J(a, b) = J(N(b), N(a))$ (γενίκευση της μεθόδου εις άτοπων απαγωγής)

(J9) HJ είναι συνεχής συνάρτηση

Κανόνες De Morgan (De Morgan Laws). Μέσω αυτών των κανόνων μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνολα τριάδων ασαφών συνδέσμων, τα οποία συσχετίζονται μεταξύ τους και αποτελούν τις τριάδες De Morgan. Αυτοί οι κανόνες είναι οι εξής:

- $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$
- $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$
- $a \rightarrow b = \neg a \vee b$
- $a \rightarrow b = \neg(a \wedge \neg b)$

Σύμφωνα όμως με τον τρόπο γραφής που ακολουθήσαμε μέχρι τώρα, οι κανόνες De Morgan παίρνουν τη μορφή:

- $U(a, b) = N(T(N(a), N(b)))$
- $T(a, b) = N(U(N(a), N(b)))$
- $J(a, b) = U(N(a), b)$
- $J(a, b) = N(T(a, N(b)))$

B. Η γενίκευση της ασαφούς σύζευξης των Dubois & Prade (1980) καθώς και οι τρόποι παραγωγή άλλων γεννητριών μέσω αυτής.

Η ασαφής σύζευξη Dubois & Prade έχει τη μορφή $T(a, b) = ab / \text{Max}[a, b, \lambda]$ με $\lambda \in [0,1]$ (βλ. Klir, George, and Bo Yuan [1] σελ.74)

Αλλάζοντας τον τρόπο γραφής, παίρνουμε $T(a, b) = \text{Min}[a, b, ab/\lambda]$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι οι δύο αυτοί τύποι ταυτίζονται.

Θέτοντας όπου $k = 1/\lambda$ με $k \in [1, \infty)$ μετασχηματίζεται στην μορφή που θα γενικεύσουμε. Αυτή είναι: $T(a, b) = \text{Min}[a, b, kab]$.

Παρατηρώντας την νέα μορφή που πήρε η ασαφής σύζευξη, βλέπουμε ότι στον τρίτο κλάδο πολλαπλασιάζονται οι δύο μεταβλητές που εισάγονται και b , με την παράμετρο k . Αντιμετωπίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού ως μία επέκταση ασαφούς σύζευξης $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, με τύπο $f(a, b) = ab$, η οποία διατηρεί και τα τέσσερα βασικά αξιώματα της ασαφούς σύζευξης.

Στη συνέχεια, αν αντικαταστήσουμε την βοηθητική συνάρτηση f με μία οποιαδήποτε συνάρτηση, που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες, παίρνουμε μία γεννήτρια ασαφών συζεύξεων:

Η βοηθητική συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω τέσσερα βασικά αξιώματα, και είναι της μορφής: $f: [0, w) \times [0, w) \rightarrow [0, f(w, w))$, με $w \in (1, \infty)$.

(T1) $f(a, 1) =$ αοριακή συνθήκη

(T2) f αύξουσα συνάρτηση

(T3) $f(a, b) = f(b, a)$, αντιμεταθετική

(T4) $f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$, προσεταιριστική

Δεδομένων των παραπάνω ιδιοτήτων μπορούν να οριστούν, για λόγους ευχρηστίας, τα εξής:

- $f(a, b, c) := f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$
- $f(a, b, 1) := f(f(a, b), 1) = f(a, b)$
- $f(a, b, 0) := f(f(a, b), 0) = 0$

Παραδείγματα βοηθητικών συναρτήσεων της μορφής f , με χρήση των οποίων μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες ασαφείς συζεύξεις, είναι οι εξής:

- $f(a, b) = ab$, με $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
- $f(a, b) = ab/(a^p + b^p - (ab)^p)^{1/p}$, με $f: [0, \sqrt[p]{2}) \times [0, \sqrt[p]{2}) \rightarrow [0, \infty)$

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι η γεννήτρια ασαφών συνδέσεων, που δημιουργείτε με χρήση της βοηθητικής συνάρτησης f , είναι καλώς ορισμένη και ικανοποιεί τα τέσσερα βασικά αξιώματα των ασαφών συνδέσεων. Αυτή έχει την μορφή:

$$T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$T(a, b) = \text{Min}[a, b, f(k, a, b)]$$

Για κάθε $k \in [1, w)$ με $w > 1$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $0 \leq T(a, b) \leq 1$:

$$1) f(k, a, b) \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Min}[a, b, f(k, a, b)] \geq 0 \Rightarrow T(a, b) \geq 0$$

$$2) a \leq 1, b \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Min}[a, b, f(k, a, b)] \leq 1 \Rightarrow T(a, b) \leq 1$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα τέσσερα βασικά αξιώματα των ασαφών συζεύξεων:

$$(T1) 1 \leq k \Rightarrow f(a, 1) \leq f(a, k) \Rightarrow a \leq f(a, k)$$

$$\text{Επίσης, } T(a, 1) = \text{Min}[a, 1, f(k, a, 1)] =$$

$$\text{Min}[a, 1, f(k, a)] = a$$

$$(T2) a \leq c \text{ and } b \leq d \Rightarrow f(a, b) \leq f(c, d)$$

$$\Rightarrow f(k, a, b) \leq f(k, c, d)$$

$$\Rightarrow \text{Min}[a, b, f(k, a, b)] \leq \text{Min}[c, d, f(k, c, d)]$$

$$\Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d)$$

$$(T3) T(a, b) = \text{Min}[a, b, f(k, a, b)]$$

$$= \text{Min}[b, a, f(k, b, a)] = T(b, a)$$

$$(T4) T(a, T(b, c)) = \text{Min}[a, T(b, c), f(k, a, T(b, c))]$$

$$= \text{Min}[a, \text{Min}[b, c, f(k, b, c)], f(k, a, \text{Min}[b, c, f(k, b, c)])]$$

$$= \text{Min}[a, b, c, f(k, b, c), f(k, a, \text{Min}[b, c, f(k, b, c)])]$$

$$= \text{Min}[a, b, c, f(k, b, c), f(k, a, b), f(k, a, c), f(k, a, k, b, c)]$$

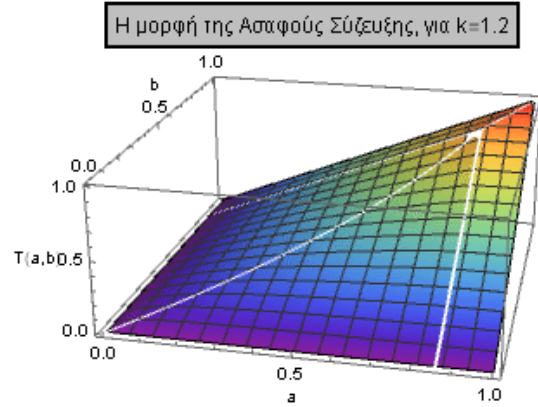
$$= \text{Min}[a, b, c, f(k, b, c), f(k, a, b), f(k, a, c), f(k, k, a, b, c)]$$

$$= \text{Min}[a, b, c, f(k, a, b), f(k, \text{Min}[a, b, f(k, a, b)], c)]$$

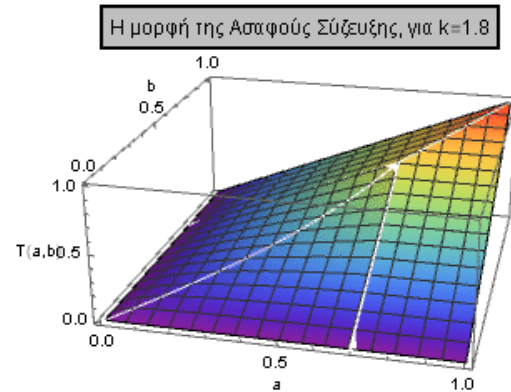
$$= \text{Min}[\text{Min}[a, b, f(k, a, b)], c, f(k, \text{Min}[a, b, f(k, a, b)], c)]$$

$$= \text{Min}[T(a, b), c, f(k, T(a, b), c)] = T(T(a, b), c)$$

Συνεπώς, η γεννήτρια παράγει ασαφείς συζεύξεις, που εξαρτώνται κάθε φορά από την βοηθητική συνάρτηση f και από την παράμετρο k , που κυμαίνεται στο διάστημα $[1, w)$. Παραδειγμα μίας ασαφούς σύζευξης, που παράγεται από αυτήν την γεννήτρια, με χρήση της βοηθητικής συνάρτησης $f(a, b) = \frac{ab}{a+b-ab}$, δίνεται σχηματικά παρακάτω, για διάφορες τιμές της παραμέτρου k :



Παρατηρούμε ότι όσο το k προσεγγίζει το 1, η ασαφής σύζευξη τείνει να ταυτιστεί με την βοηθητική συνάρτηση. Δηλαδή, για $k = 1$ η ασαφής σύζευξη γίνεται: $T(a, b) = \text{Min}[a, b, f(1, a, b)] = \text{Min}[a, b, f(a, b)] = f(a, b)$. Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε τι συμβαίνει όταν το k αυξάνεται:



Θα περάσουμε τώρα, στην δημιουργία άλλων δύο καινοτόμων γεννητριών ασαφών διαζεύξεων. Αρχικά, για την δημιουργία της ψευδοαντίστροφης ασαφούς διάζευξης, αντικαθιστούμε το εξωτερικό Minimum στην $T(a, b) = \text{Min}[a, b, f(k, a, b)]$ με Maximum, έτσι θα έχουμε την συνάρτηση $U(a, b) = \text{Max}[a, b, f(k, a, b)]$, η οποία είναι της μορφής $U: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$. Για να περιοριστεί το σύνολο τιμών στο διάστημα $[0, 1]$, μετασχηματίζουμε την παραπάνω συνάρτηση, φράσσοντας τον τρίτο κλάδο του Maximum στο 1. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται η πρώτη καινοτόμα ασαφής γεννήτρια διαζεύξεων, με τύπο:

$$U(a, b) = \text{Max}[a, b, \text{Min}[f(k, a, b), 1]].$$

Παίρνοντας την πιο απλή μορφή της πρώτης γεννήτριας, χρησιμοποιώντας ως βοηθητική συνάρτηση την $f(a, b) =$

ab , θα σχηματιστεί μια ακόμη ασαφής γεννήτρια διαζεύξεων. Αυτή είναι η:

$$U(a, b) = (a^p + b^p - \text{Min}[a, b, kab]^p)^{\frac{1}{p}}$$

Μπορεί να αποδειχθεί, παρόμοια με την πρώτη περίπτωση, πως οι δύο αυτές συναρτήσεις, ικανοποιούν τα 4 βασικά αξιώματα των ασαφών διαζεύξεων και είναι καλώς ορισμένες.

Γ. Καινοτόμες τριάδες De Morgan και ασαφείς συνεπαγωγές.

Από τις παραπάνω γεννήτριες ασαφών συνδέσμων, προκύπτουν νέες τριάδες De Morgan και οι αντίστοιχες ασαφείς συνεπαγωγές, μέσω των γνωστών κανόνων De Morgan που προαναφέρθηκαν. Θα παρουσιαστεί ο τρόπος κατασκευής τους, κάνοντας χρήση τυχαίας ασαφούς αρνήσεως.

Από την πρώτη ασαφή γεννήτρια συζεύξεων, με τύπο $T(a, b) = \text{Min}[a, b, f(k, a, b)]$, παράγονται οι αντίστοιχες γεννήτριες ασαφών διαζεύξεων και ασαφών συνεπαγωγών:

- $U(a, b) = N(T(N(a), N(b))) = N(\text{Min}[N(a), N(b), f(k, N(a), N(b))])$
- $J(a, b) = N(T(a, N(b))) = N(\text{Min}[a, N(b), f(k, a, N(b))])$

Στην συνέχεια, από τις άλλες δύο γεννήτριες ασαφών διαζεύξεων, που κατασκευάστηκαν προηγουμένως, με τύπους, $U(a, b) = \text{Max}[a, b, \text{Min}[f(k, a, b), 1]]$ και

$U(a, b) = (a^p + b^p - \text{Min}[a, b, kab]^p)^{\frac{1}{p}}$, παράγονται αντίστοιχα οι γεννήτριες ασαφών συζεύξεων και ασαφών συνεπαγωγών:

- $T(a, b) = N(U(N(a), N(b))) = N(\text{Max}[N(a), N(b), \text{Min}[f(k, N(a), N(b)), 1]])$
- $J(a, b) = U(N(a), b) = \text{Max}[N(a), b, \text{Min}[f(k, N(a), b), 1]]$
- $T(a, b) = N(U(N(a), N(b))) = N((N(a)^p + N(b)^p - \text{Min}[N(a), N(b), kN(a)N(b)]^p)^{\frac{1}{p}})$
- $J(a, b) = U(N(a), b) = (N(a)^p + b^p - \text{Min}[N(a), b, kN(a)b]^p)^{\frac{1}{p}}$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές που προέκυψαν ικανοποιούν 7 από τα 9 βασικά αξιώματα ασαφών συνεπαγωγών. Τα δύο από αυτά που δεν ικανοποιούνται είναι το 5^ο αξίωμα (ταυτότητας) και το 7^ο αξίωμα (συνοριακής συνθήκης).

IV. CONCLUSIONS

Κατά τη διάρκεια αυτής της ερευνητικής εργασίας, καταλήξαμε στην δημιουργία 3^{ων} καινοτόμων γεννητριών ασαφών συνδέσμων, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν δίοδο, για την κατασκευή άλλων.

Παρουσιάζονται εδώ κάποιες νέες γεννήτριες υπό μελέτη, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις τρεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω. Αν χρησιμοποιήσουμε τις γεννήτριες ασαφών διαζεύξεων ως παρονομαστή, σε ένα κλάσμα με αριθμητή το ab . Δηλαδή, θα έχουμε, $T(a, b) = ab/Ug(a, b)$, όπου Ug γεννήτριες ασαφών διαζεύξεων. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι παρακάτω τρεις πρώτες ασαφείς συζεύξεις. Ενώ για την τέταρτη, πήραμε την απλούστερη μορφή της πρώτης γεννήτριας και την διαιρέσαμε με την ασαφή διάζευξη probabilistic or των Schweizer and Sklar(1963):

- $T(a, b) = \frac{ab}{\text{Max}[a, b, 1 + (-1 + a + b - ab)k]} \text{ για } k > 1$
- $T(a, b) = \frac{ab}{\text{Max}[a, b, \text{Min}[kab, 1]]} \text{ για } k > 1$
- $T(a, b) = \frac{ab}{(a^p + b^p - \text{Min}[a, b, kab]^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ για } k > 1$
- $T(a, b) = \frac{\text{Min}[a, b, kab]}{(a^p + b^p - (ab)^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ για } k > 1$

Ενδιαφέρον θέμα προς αναζήτηση είναι να βρεθούν εφαρμογές στις οποίες να εφάπτονται οι νέοι αυτοί λογικοί σύνδεσμοι σε πραγματικές καταστάσεις. Επίσης θα ήταν χρήσιμο να μελετηθούν κάποιες μέθοδοι, για την βέλτιστη επιλογή της παραμέτρου k , σε κάθε ένα λογικό σύνδεσμο που παρουσιάστηκε στην εργασία.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω πολλές ευχαριστίες στον κ. Βασίλη Παπαδόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση καθώς επίσης και στον κ. Μιχάλη Ανούση που ως β' αξιολογητής με τίμησε με την στήριξη και την θετική του γνώμη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- B. Παπαδόπουλου, Γ. Μποτζώρη, Ασαφής Λογική, Ξάνθη, 2015.
 Hung, T., & Walker, E. A. (2006). A first course in fuzzy logic.
 Kacprzyk, J. (2013). Studies in Fuzziness and Soft Computing 295.
 Klement, E. P., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). Triangular norms. 2000.
 Klir, George, and Bo Yuan. Fuzzy sets and fuzzy logic. Vol. 4. New Jersey: Prentice hall, 1995.
 Zimmermann, Hans-Jürgen. Fuzzy set theory—and its applications. Springer Science & Business Media, 2011.