

Το Πέμπτο Αίτημα του Ευκλείδη , η Αμφισβήτησή του και η Δημιουργία των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών

ΑΓΓΕΛΟΣ ΚΩΣΤΑΣ

Μεταπτυχιακός Φοιτητής ΕΑΠ

std091071@ac.eap.gr

ΑΝΔΡΕΑΣ ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ

Μέλος ΣΕΠ

arvanito@neptune.math.upatras.gr

• INTRODUCTION:

Εάν επιχειρούνταν μία σύνοψη της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, αυτή θα έπρεπε να εστιάζει σε δύο συγκεκριμένα σημεία. Πρώτα και κύρια στόχος της είναι η αναλυτική παρουσίαση των προσπαθειών απόδειξης του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη. Επίσης, γίνεται εκτενής αναφορά στην αμφισβήτηση της απολυτότητάς του καθώς οι προσπάθειες απόδειξής του ήταν ανεδαφικές και μη τελειοποιημένες. Αναλυτικότερα, στην αρχή της εργασίας παρουσιάζεται η αξιωματική θεμελίωση ως δομικό σύστημα αρχών για τη Μαθηματική Επιστήμη , η ιστορικότητά της και η συσχέτισή της με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στη συνέχεια, καταγράφονται οι προσπάθειες απόδειξης του 5ου αιτήματος Ευκλείδη και παρατίθενται οι απόπειρες άρνησής του και γέννησης των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών. Τελικά, αναπτύσσονται διεξοδικά η ουδέτερη Γεωμετρία, η Υπερβολική, καθώς και η Ελλειπτική.

• METHODOLOGY:

Από την έρευνα πάνω στο 5ο Ευκλείδειο Αίτημα ,για την προσπάθεια απόδειξής του και την εν τέλει άρνηση αυτού, κάλλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας ήταν μία τομή στον κόσμο των θετικών επιστημών. Θεωρείται και είναι, μία επαναστατική ιδέα συγκρίσιμη με την θεωρία του Κοπέρνικου για τη Γη και το γεγονός ότι δεν αποτελεί το κέντρο του σύμπαντος. Θεωρείται και είναι, μία ιδέα εφάμιλλης σπουδαιότητας με εκείνη του Einstein , όπου αναφέρει ότι ο χρόνος δεν είναι ο ίδιος για όλους τους παρατηρητές. Πως αλλιώς μπορεί να χαρακτηριστεί μία σκέψη όταν σε βγάζει από απτά και κατανοητά μονοπάτια και σε βάζει σε έννοιες καινούργιες, φαντασιακές και άυλες που δύσκολα μπορεί να τις συλλάβει ο νους;

Από την ανακάλυψή της και έπειτα όλα είναι διαφορετικά. Η αντίληψη που ήταν αποδεκτή επί μακρόν ήταν ότι η Γεωμετρία του φυσικού μας χώρου είναι Ευκλείδεια. Θερμός υποστηρικτής της άποψης αυτής ήταν ο Immanuel Kant (1724 – 1804). Οι ιδέες του σχετικά με το χώρο και τη Γεωμετρία λειτούργησαν ανασταλτικά για την δημιουργία και αποδοχή της νέας Γεωμετρίας. Είναι η μοίρα των προοδευτικών ανθρώπων να χαράσσουν νέους δρόμους στην πορεία τους μέσα στο χρόνο και είναι η μοίρα των συντηρητικών ιδεών να στέκονται εμπόδιο, άλλοτε γόνιμα, τις πιο πολλές φορές άγονα όμως, σε κάθε μεγάλη αλλαγή του κόσμου. Αξίζει να τονιστεί ότι ο Kant στην «Κριτική του Καθαρού Λόγου» διατυπώνει την άποψη ότι η Γεωμετρία είναι η μελέτη του χώρου, και η γνώση μας για αυτόν δεν είναι εμπειρική αλλά είναι συνέπεια του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένος ο εγκέφαλός μας. Η δομή του είναι τέτοια ώστε η Ευκλείδεια Γεωμετρία να αποτελεί τη μόνη Γεωμετρία που μπορεί να συλλάβει εύκολα. Κατά συνέπεια, είναι λογική αυτή η φυσική ροπή της αποδοχής του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη.

• SELECTED RESULTS:

Η γέννηση της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδήγησε σε μια ολοκληρωμένη κατανόηση της υποθετικής φύσης της

αξιωματικής Γεωμετρίας, και έτσι σε μια κατανόηση του συνόλου των μαθηματικών γενικά. Ακόμη, αποσαφήνισε την έννοια του φυσικού χώρου σε αντιδιαστολή με την έννοια του μαθηματικού χώρου. Με την αναγνώριση της ισχύος της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προέκυψε το ερώτημα κατά πόσο ο φυσικός χώρος ήταν Ευκλείδειος ή όχι. Ο Schweikart με το γεωμετρικό σύστημα που δημοσίευσε με τον τίτλο «Astral Geometry» επιχείρησε να δείξει ότι μόνο μέσω παρατηρήσεων σε αστρονομική κλίμακα θα μπορούσε να ανιχνευθεί η διαφορά ανάμεσα στη δική του και την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Επιπλέον, ο Gauss προσπάθησε να μετρήσει απευθείας αν το άθροισμα των γωνιών ενός μεγάλου τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες ή όχι. Έτσι μετρησε ένα τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από τα όρη Brocken, Hoher Hagen και Inselberg, με πλευρές 69, 85 και 107 χιλιομέτρων αντίστοιχα. Βρήκε ότι το άθροισμα των γωνιών υπερβαίνει τις 180° περίπου κατά 15 δευτέρα λεπτά. Η διαφορά αυτή όμως θεωρήθηκε ότι είναι εντός των ορίων του σφάλματος και συνεπώς δεν υπάρχει απόκλιση από τις 180°. Έτσι δηλώνει ότι η δομή του πραγματικού χώρου είναι ευκλείδεια, με βάση την εμπειρία.

Σε ένα γράμμα του στον Bessel, ο Gauss σημείωνε πως ο αριθμός είναι ένα προϊόν της σκέψης, ενώ ο χώρος είναι μια πραγματικότητα έξω από αυτήν, της οποίας τους νόμους δεν μπορούμε να γνωρίζουμε a priori. Η πειραματική έρευνα του Gauss για τη γεωμετρική δομή του χώρου βασιζόταν στην πίστη ότι η Γεωμετρία είναι θεμελιωδώς διαφορετική από την αριθμητική και την ανάλυση. Ενώ οι δύο αυτοί κλάδοι των μαθηματικών βασίζονται στην ιδέα του καθαρού αριθμού, η Γεωμετρία γίνεται εμπειρική επιστήμη, εφόσον απαιτεί πειραματική διερεύνηση. Από τις σημειώσεις του γνωρίζουμε ότι θεωρούσε την Γεωμετρία εμπειρική επιστήμη σαν την μηχανική. Γι' αυτόν, η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν από λογικής πλευράς άψογη, αλλά το πείραμα φαίνεται να αποκλείει την εφαρμογή της στο φυσικό χώρο.

Ο Lobachevsky αναφέρει ότι αν ο φυσικός χώρος ήταν διαφορετικός από τον ευκλείδειο, τότε η διαφορά τους θα μπορούσε να γίνει φανερή μόνο μέσω παρατηρήσεων μεγάλης κλίμακας γι' αυτό και προσπάθησε να αποδείξει εμπειρικά τη μη ευκλείδεια δομή του χώρου. Καθώς δεν τα κατάφερε συμπεράνε ότι για όλους τους πρακτικούς σκοπούς μόνο η Ευκλείδεια Γεωμετρία είχε σημασία. Στο έργο του «The New Principles of Geometry», χαρακτηριστικά τοποθετείται:

«Η νέα γεωμετρία της οποίας τα θεμέλια βρίσκονται σε αυτή εδώ την εργασία, αν και δεν έχει εφαρμογή στη φύση, μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο της φαντασίας μας. Αν και δεν χρησιμοποιείται σε πραγματικές μετρήσεις, ανοίγει ένα νέο πεδίο για την εφαρμογή της γεωμετρίας στην ανάλυση και αντιστρόφως».

• CONCLUSIONS:

Για την εφαρμογή της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας στον φυσικό χώρο ,οι διενέξεις μεταξύ επιστημόνων και φιλοσόφων ήταν έντονες, με αποκορύφωμα την χρονική περίοδο αμέσως

μετά την δημοσίευση της διάλεξης του Riemann: «Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen».

Στη φημισμένη αυτή διάλεξη, αναλύοντας τις μαθηματικές ιδιότητες μη καθορισμένων αντικειμένων ο Riemann έδωσε έμφαση στην διάκριση ανάμεσα στο απειρίοστο και το άπειρο. Μέχρι τότε, ο χώρος, ως συνεκτικό συνεχές, θεωρούνταν απειρίοστος, και ένα σύνορο αποτελούσε ιδιομορφία. Ο Riemann έδειξε ότι το συνεκτικό και το πεπερασμένο είναι συμβατά μεταξύ τους. Η γενίκευση που κάνει στη θεωρία των επιφανειών και οι αναφορές του στην καμπυλότητα του χώρου, αποδεικνύουν ότι ο χώρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ο χώρος της Γεωμετρίας των Lobachevsky και Bolyai ήταν ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου χώρου, με τον χώρο της Ευκλείδειας να είναι σταθερής μηδενικής καμπυλότητας και τον χώρο της Υπερβολικής να είναι σταθερής αρνητικής καμπυλότητας.

Αυτή η ανάλυση για την δομή ενός χώρου έχει μεγάλη σημασία στα σύγχρονα μαθηματικά. Ο Riemann γενίκευσε με επιτυχία την θεωρία της εσωτερικής γεωμετρίας πάνω σε μια επιφάνεια. Ο Gauss αναζήτησε μέχρι ποιο σημείο είναι δυνατόν να εκφραστούν οι γεωμετρικές ιδιότητες των καμπυλών. Θα πρέπει να μην επηρεάζονται από την παραμόρφωση της επιφάνειας μέσα στο περιέχοντα χώρο. Εδώ είναι χαρακτηριστικά τα παραδείγματα του κώνου και του κυλίνδρου σε αντιδιαστολή με την σφαίρα. Τα δύο πρώτα έχουν τις ίδιες τοπικές εσωτερικές ιδιότητες με ένα επίπεδο, διότι ένα επίπεδο μπορεί να διπλωθεί και να δημιουργηθεί ένας κώνος ή ένας κύλινδρος (δεν αλλοιώνονται οι μετρικές τους σχέσεις). Στην σφαίρα όμως δεν συμβαίνει αυτό με τις τοπικές εσωτερικές ιδιότητές της να διαφέρουν από αυτές του επιπέδου. Ο Gauss συνειδητοποίησε πως οι εσωτερικές ιδιότητες των επιφανειών είναι αυτές που αξίζουν ενδελεχή μελέτη από τους επιστήμονες.

Το ενδιαφέρον του Gauss εντάθηκε και το 1827 δημοσίευσε άρθρο με τίτλο «Disquisitiones generales circa superficies curvas» όπου μελετά το πρόβλημα στη γενικότητά του. Παρουσιάζει τις τετραγωνικές διαφορικές μορφές και εισάγει την έννοια της καμπυλότητας-σήμερα αποκαλείται «γκαουσιανή καμπυλότητα» και την δυνατότητα ενός καθορισμού της καμπυλότητας μιας επιφάνειας.

Εδώ χρήζει ιδιαίτερης αναφοράς η τοποθέτηση του Riemann για n -διάστατες πολλαπλότητες που γενικεύει το «Theorema Egregium» του Gauss που αφορά την καμπυλότητα και δημοσιεύτηκε το 1828. Αν και άλλοι μαθηματικοί είχαν μιλήσει πριν για τον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, η ιδέα μιας n -διάστατης πολλαπλότητας ήταν νέα. Σύμφωνα με αυτή ένας χώρος μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια n συντεταγμένων για την εξακρίβωση της θέσης ενός σημείου, όμως αυτές οι συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητο να συνδέονται με την απόσταση με ευκλείδειο τρόπο. Ο σύγχρονος ορισμός μιας πολλαπλότητας απαιτεί μόνο να υπάρχουν τοπικά αυτά τα συστήματα συντεταγμένων και να μην υπάρχουν προβλήματα σε περιοχές της πολλαπλότητας επικαλυπτόμενες από περισσότερα του ενός τέτοια συστήματα.

Με την ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας τα καθαρά μαθηματικά μπορούν να εφαρμοστούν με συνεπή τρόπο σε χώρους με αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων. Το ερώτημα γιατί ο συνηθισμένος χώρος έχει μόνο τρεις διαστάσεις θεωρήθηκε πρόβλημα της φυσικής. Για τον Jammer: «Ο Gauss φαίνεται να έχει κατανοήσει ότι το πρόβλημα αν ο χώρος έχει τρεις ή περισσότερες διαστάσεις έχει την ίδια βάση με το πρόβλημα του ευκλείδειου ή μη ευκλείδειου χαρακτήρα του χώρου»

Συνάμα ο Riemann θεωρεί το Σύμπαν τρισδιάστατο και μάλλον ομοιογενές. Δεν είναι σαφές όμως ότι η γεωμετρία του είναι Ευκλείδεια. Θα έπρεπε να απασχολήσει κυρίως τους φυσικούς το τι είδος τρισδιάστατης πολλαπλότητας είναι. Οι μαθηματικοί μπορούν να βοηθήσουν, δείχνοντάς τους τις δυνατές εκδοχές μιας τρισδιάστατης πολλαπλότητας. (Davis, 2001)

Ανάμεσα στις πολλές απόπειρες που έγιναν για να αποδειχθεί ότι ο χώρος έχει μόνο τρεις διαστάσεις αυτή του Poincare ήταν αξιοσημείωτη. Σε ένα γράμμα του θα επισημάνει:

«το πιο σημαντικό από όλα τα θεωρήματα της τοπολογικής γεωμετρίας είναι ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις ... Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις; Για να διαχωρίσουμε το χώρο σε μέρη, είναι απαραίτητες τομές τις οποίες ονομάζουμε επιφάνειες, για να διαχωρίσουμε τις επιφάνειες είναι απαραίτητες τομές τις οποίες ονομάζουμε γραμμές, για να διαχωρίσουμε τις γραμμές είναι απαραίτητες τομές τις οποίες ονομάζουμε σημεία. Δεν μπορούμε, όμως, να προχωρήσουμε άλλο, αφού ένα σημείο, από τη στιγμή που δεν αποτελεί ένα συνεχές, δεν μπορεί να διαιρεθεί. Επομένως, οι γραμμές, οι οποίες μπορούν να διαχωριστούν από τομές που οι ίδιες δεν είναι συνεχή, είναι συνεχή μιας διάστασης. Οι επιφάνειες, οι οποίες μπορούν να διαχωριστούν σε μέρη από μονοδιάστατα συνεχή, είναι συνεχή δύο διαστάσεων. Και ο χώρος, ο οποίος μπορεί να διαχωριστεί από δισδιάστατα συνεχή, είναι ένα συνεχές τριών διαστάσεων.»

Αν και ο Poincare πίστεψε ότι είχε ανακαλύψει μια θεμελιώδη ποιοτική βάση για να αποδώσει στο συνηθισμένο χώρο τρεις διαστάσεις, είναι προφανές ότι η απόδειξή του στην καλύτερη περίπτωση δείχνει απλώς την ύπαρξη ενός κάτω ορίου στον αριθμό των διαστάσεων. Η αξία του συλλογισμού του ωστόσο βρίσκεται στο γεγονός ότι μπορεί να θεωρηθεί ως η απαρχή της σύγχρονης τοπολογικής έρευνας σχετικά με το μαθηματικό πρόβλημα της διαστατικότητας. Ο Poincare αν και δεν αποσκοπούσε σε έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας της διάστασης προέβλεψε ορθώς τα δύο ουσιώδη στοιχεία του σύγχρονου ορισμού της: τη χρήση των διαχωριστικών υποχώρων και τον επαγωγικό χαρακτήρα του ορισμού. Αξία αναφοράς είναι η παράθεση των όσων είχε πει κάποτε για τον συστηματικό ασυνείδητο και μαθηματικής ανακάλυψης: «Για δεκαπέντε μέρες είχα τραβήξει τα πάνδενα να αποδείξω ότι δεν μπορούν να υπάρχουν συναρτήσεις σαν αυτές – που από τότε τις ονόμασα συναρτήσεις Fuchs. Ομολογώ ότι ήμουν ανίδεος. Κάθε μέρα καθόμουν στο γραφείο μου για μια δυο ώρες και έκανα ατέλειωτους συνδυασμούς, χωρίς να φτύνω σε κανένα αποτέλεσμα. Ένα βράδυ, αγνόησα τις συνήθειές μου, ήπια έναν βαρύ καφέ και έμεινα όλη νύχτα ξάγρυπνος. Αίφνης, οι ιδέες ξεπετάχτηκαν σαν σύννεφο. Τις ένιωσα να σμίγουν μέχρι που έγιναν ζευγάρια, δημιουργώντας σαν να λέμε, έναν σταθερό συνδυασμό. Το επόμενο πρωί είχα αποδείξει την ύπαρξη μιας κλάσης συναρτήσεων Fuchs, αυτές που προκύπτουν από τις υπεργεωμετρικές σειρές. Το μόνο που έπρεπε να κάνω ήταν να καταγράψω τα συμπεράσματά μου, πράγμα που δεν μου πήρε παρά λίγες ώρες»

Χωρίς υπερβολή τα λόγια αυτά θα πρέπει να είναι χαραγμένα στο μυαλό κάθε επιστήμονα όταν επιχειρεί μία απόδειξη και βρίσκεται σε τέλμα, μην μπορώντας να επιτύχει το στόχο του.

• REFERENCES

- R.J. Trudeau : The Non-Euclidean Revolution , Birkhauser (1987)
- I.Kant : Κριτική Του Καθαρού Λόγου ,Εκδόσεις Παπαζήσης (1990)
- Πρόκλος : Σχόλια Στο 1ο Βιβλίο Των Στοιχείων Του Ευκλείδη , μετάφραση Σπανδάγος, Εκδόσεις Αίθρα (2001)
- Χ.Στράντζαλος , Η Εξέλιξη Των Ευκλείδειων Και Των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, Εκδόσεις Καρδαμίτσα (1989)
- B.A. Rosenfeld: A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space, New York: Springer – Verlag (1988)
- D.M. Davis: Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2001)
- H. Eves, Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών, Εκδόσεις Τροχαλία (1990)
- R. Bonola, Non-Euclidean Geometry, New York: Dover (1955)
- R. Torretti, Philosophy of geometry from Riemann to Poincare (1984)
- Ε.Βασιλείου, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος: Γεωμετρία για τη Διδακτική, Τμήμα Μαθηματικών. Ε.Κ.Π.Α. (2003)
- J.Lambert, Theorie der Parallellinien (1786).
- J.M Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, W. H. Freeman and company (1980)

Φ.Μ. Ντοστογιέφσκι, Αδερφοί Καραμαζώφ, Εκδόσεις Ίνδικτος (2011)
R. Bonola, Non Euclidean Geometry with a supplement containing «The
Theory of Parallels» , by Nicolas Lobachevsky and the «The
Science of Absolute Space» by John Bolyai Dover (1955)
Μ. Καίσαρη , Διδακτορική Διατριβή, Διδακτικές Διαστάσεις των

Μοντέλων των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών στα Πλαίσια της
Πανεπιστημιακής Εκπαίδευσης (2014) [16] H.Eves, Foundation
and Fundamental Concepts of Mathematics, Dover (1997) [17]
D.M. Davis - R. Hersh , Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδόσεις Τροχαλία
(1981)