

Προσδιορισμός Του Βέλτιστου Ελλειψοειδούς Προτύπου που Προσεγγίζει Τοπικά Την Επιφάνεια Της Γης

Περσεφόνη Γ. Γαλάνη

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

persgalan@gmail.com, std123419@ac.eap.gr

Φωτεινή Καριώτου

Επίκουρη καθηγήτρια ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

kariotou@eap.gr

Περίληψη

Ο προσδιορισμός ενός γεωμετρικού μοντέλου για την περιγραφή της επιφάνειας της γης υπήρξε αντικείμενο αναζήτησης από τους αρχαίους χρόνους και βρίσκεται στον πυρήνα ενός από τα σημαντικότερα προβλήματα της γεωδαισίας, του προβλήματος του γεωειδούς. Από τα μέσα του περασμένου αιώνα, για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το μοντέλο του Πεπλατυσμένου Σφαιροειδούς WGS84 που ελαχιστοποιεί το μέσο γεωμετρικό υψόμετρο αλλά τοπικά παρουσιάζει απόκλιση από την επιφάνεια της γης της τάξης δεκάδων μέτρων. Στην παρούσα εργασία επιχειρείται τοπική βελτιστοποίηση της προσέγγισης με μοντέλο τριαξονικού ελλειψοειδούς, αξιοποιώντας την ευελιξία που παρέχουν οι τρεις άνιστοι ημιάξονές του για την βέλτιστη προσαρμογή του σε τοπική κλίμακα στην επιφάνεια της γης. Η μέθοδος εφαρμόζεται, στο πλαίσιο της εργασίας, σε συγκεκριμένες περιοχές της Ελλάδας με πραγματικές μετρήσεις πεδίου και η προσέγγιση που επιτυγχάνεται είναι της τάξης των λίγων εκατοστών του μέτρου.

Λέξεις-Κλειδιά: Γεωειδές, Τριαξονικό Ελλειψοειδές, Γεωμετρικό υψόμετρο, Moore – Penrose, Lagrange.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ερώτημα του προσδιορισμού ενός γεωμετρικού στερεού που περιγράφει το σχήμα της Γης αντιμετώπιστηκε αρχικά από τους Έλληνες και τους Φοινίκες από τον 6^ο αιώνα π.Χ., που μίλησαν για σφαιρική Γη, ενώ από το 1960 μ.Χ. μέχρι σήμερα είναι αποδεκτή η περιγραφή της μέσω της επιφάνειας του γεωειδούς. Το γεωειδές είναι ισοδυναμική επιφάνεια του βαρυτικού πεδίου της Γης και προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη Μέση Στάθμη Θάλασσας (ΜΣΘ), επεκτεινόμενη νοητά στο χερσαίο τμήμα της Γης. Η περιγραφή του γεωειδούς με ένα ιδανικό γεωμετρικό στερεό κατάλληλο για γεωδαιτική χρήση και επικοινωνία αποτελεί ανοικτή επιστημονική πρόκληση, το αποκαλούμενο «πρόβλημα του γεωειδούς», καθώς το σχήμα του, επηρεαζόμενο από την κατανομή μάζας στο εσωτερικό της Γης, καθιστά το εγχείρημα αναλυτικά απρόσιτο (Wenzel, 1989). Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται γεωμετρικά πρότυπα του γεωειδούς, με επικρατέστερο το Ελλειψοειδές Εκ Περιστροφής (ΕΕΠ), WGS84 (Φωτίου (2007), Λιβιεράτος & Φωτίου (1996), Torge (2001), Mather (1973)). Πρόκειται για ένα παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα, στο οποίο βασίζονται τα συστήματα πλοήγησης GPS που χρησιμοποιούνται

για τον γεωγραφικό εντοπισμό σημείων της επιφάνειας της Γης. Το WGS84 είναι ΕΕΠ που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό γεωμετρικό ύψος του συνόλου των σημείων της επιφάνειας της Γης. Έτσι, αναπόφευκτα παρουσιάζει τοπικά σημαντική απόκλιση από το πραγματικό ύψος σε σημεία όπου το ανάγλυφο της Γης έχει ιδιομορφίες, τόσο στην ξηρά όσο και στις ακτογραμμές ή σε περιοχές υποθαλάσσιων ρηγματώσεων όπου η ΜΣΘ διαφέρει αρκετά από την ισοδυναμική επιφάνεια του βαρυτικού πεδίου, που είναι το γεωειδές. Οι αποκλίσεις αυτές είναι αιτία σφαλμάτων στα συστήματα πλοήγησης GPS, εμφανίζοντας σημεία της γης σε διαφορετικό ύψος από ό,τι είναι πραγματικά, επιφέροντας κάποιες φορές μοιραίες επιπτώσεις ιδίως σε στρατιωτικές επιχειρήσεις (Mather, 1973), <https://defencereview.gr/i-akriveia-ton-kateythynomenon-vomvon-gps/>.

Η αναζήτηση λοιπόν ενός μοντέλου του γεωειδούς με υψηλή τοπική ακρίβεια μπορεί να είναι κρίσιμο ερώτημα στην τεχνολογία συστημάτων πλοήγησης υψηλής αξιοπιστίας σε τοπικό επίπεδο.

Προς αυτή την κατεύθυνση, στην παρούσα μελέτη διερευνάται το ερώτημα της βελτιστοποίησης της γεωμετρικής περιγραφής του γεωειδούς σε τοπικό επίπεδο, χρησιμοποιώντας ένα Τριαξονικό Ελλειψοειδές ως πρότυπο. Η Ελλειψοειδής αυτή επιφάνεια, (E) επιλέγεται να έχει το ίδιο κέντρο, ισημερινό επίπεδο και πολικό άξονα με το WGS84, μια που αυτά αναφέρονται στο γεωκέντρο, τον ισημερινό και τον πολικό άξονα της Γης, με επιστημονικά αποδεκτή ακρίβεια και με προσαρμογές οι οποίες είναι ευρέως μελετημένες (Φωτίου (2007)). Έτσι, σε σχέση με το ΕΕΠ WGSS84, που είναι μία πεπλατυσμένη σφαιροειδής επιφάνεια, η τριαξονική ελλειψοειδής επιφάνεια E διαφέρει στο ότι ορίζεται με γεωμετρικές παραμέτρους τους τρεις άνιστους ημιάξονές της, σε σχέση με τους μόνο δύο άξονες της επιφάνειας εκ περιστροφής WGS84, εισάγοντας έτσι έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας για την βέλτιστη τοπική προσαρμογή (Salmon, 1885). Η επιφάνεια E προσδιορίζεται με βάση τις γεωγραφικές συντεταγμένες ενδεικτικών σημείων στην περιοχή ενδιαφέροντος, που είναι διαθέσιμες είτε από δορυφορικά συστήματα GNSS σε βάσεις δεδομένων, είτε από άμεσες επιτόπιες μετρήσεις ιδιαίτερα όταν το τοπικό ανάγλυφο το απαιτεί.

Η παρούσα μελέτη αναπτύσσει μία μέθοδο προσδιορισμού της επιφάνειας E, με δεδομένες τις γεωγραφικές συντεταγμένες, σημείων θαλάσσιων περιοχών, που έχουν ληφθεί με επιτόπιες μετρήσεις χρησιμοποιώντας ένα πρωτοποριακό σύστημα καταγραφής, γνωστό ως μέθοδος GNSS σε πλωτό μέσο (Lycourghiotis S., (2017α), Lycourghiotis S.,(2017β)).

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Σημειώνουμε εδώ πως, στις θαλάσσιες περιοχές, το ανάγλυφο της Γης συμπίπτει με το γεωειδές και έτσι το γεωμετρικό πρότυπο προσεγγίζει τοπικά συγχρόνως την επιφάνεια της Γης και το γεωειδές. Κριτήριο της προσέγγισης είναι η ελαχιστοποίηση του γεωμετρικού υψόμετρου κάθε σημείου, δηλαδή της απόστασης του σημείου της επιφάνειας της Γης από την γεωμετρική επιφάνεια που προτυποποιεί το γεωειδές (Moritz, 1970). Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν βελτίωση στην τοπική προσέγγιση του γεωειδούς της τάξης ελάχιστων εκατοστών έναντι των δεκάδων μέτρων που παρέχει το WGS84 .

Ειδικότερα, η μέθοδος προσδιορισμού της επιφάνειας E για κάθε περιοχή ενδιαφέροντος, αφορά τρία στάδια: α) τον προσδιορισμό του βέλτιστου Τριαξονικού Ελλειψοειδούς κάθε περιοχής, β) τον υπολογισμό του γεωμετρικού υψόμετρου κάθε σημείου, με επιφάνεια αναφοράς το βέλτιστο Τριαξονικό Ελλειψοειδές και γ) τη σύγκριση των γεωμετρικών υψόμετρων που υπολογίστηκαν με τα αντίστοιχα γεωμετρικά υψόμετρα του WGS84. Η αριθμητική υλοποίηση όλων των παραπάνω έχει γίνει με το λογισμικό Mathematica (Colombo,1981).

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

A. Καθορισμός του βέλτιστου Τριαξονικού Ελλειψοειδούς της περιοχής

Για τον υπολογισμό της επιφάνειας E του βέλτιστου Τριαξονικού Ελλειψοειδούς σε μια συγκεκριμένη περιοχή ενδιαφέροντος θεωρούμε κατ' αρχήν το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz , με κέντρο το κέντρο μάζας της Γης και πολικό άξονα zz' τον άξονα περιστροφής της Γης. Το επίπεδο **Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.** Oxy θα συμπίπτει με το ισημερινό επίπεδο της Γης. Το ελλειψοειδές πρότυπο που θα προσδιοριστεί στο καρτεσιανό αυτό σύστημα, θα είναι, κατά συνέπεια, ένα Γεωκεντρικό Τριαξονικό Ελλειψοειδές.

Στο σύστημα Oxyz θεωρούμε τις δεδομένες καρτεσιανές συντεταγμένες k επιλεγμένων σημείων της περιοχής, (x_i, y_i, z_i) , με $i=1,2,\dots,k$ και υποθέτουμε ότι αυτά τα σημεία ανήκουν στο Τριαξονικό Ελλειψοειδές με γενική εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Απαιτώντας τα k σημεία να ικανοποιούν την (1), προκύπτει ένα σύστημα με 3 αγνώστους, τους ημιάξονες a, b, c του E και k εξισώσεις, δηλαδή ένα σύστημα της μορφής:

Το σύστημα (2) είναι υπερκαθορισμένο καθώς $k \gg 3$ και γενικά δεν έχει ακριβή λύση. Υπολογίζουμε έτσι, την ελάχιστη τετραγωνική λύση του, χρησιμοποιώντας τον ψευδοαντίστροφο πίνακα του Moore – Penrose (Δάσιος, 2001). Με το τρόπο αυτό, βρίσκουμε τους τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς E που προσεγγίζει καλύτερα τα k επιλεγμένα σημεία της υπό μελέτη περιοχής.

B. Υπολογισμός του γεωμετρικού υψόμετρου από το βέλτιστο Τριαξονικό Ελλειψοειδές E

Έχοντας υπολογίσει την εξίσωση του βέλτιστου ελλειψοειδούς E, στη συνέχεια υπολογίζουμε το γεωμετρικό υψόμετρο κάθε σημείου $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,\dots,k$, δηλαδή την κάθετη απόσταση κάθε σημείου από το ελλειψοειδές E.

Με άλλα λόγια, υπολογίζουμε την απόσταση κάθε σημείου $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,\dots,k$ της περιοχής ενδιαφέροντος, από το εφαπτόμενο επίπεδο του ελλειψοειδούς E, στο σημείο εκείνο, έστω $\mathbf{r}_{di}(x_{di}, y_{di}, z_{di})$, στο οποίο αυτή να είναι ελάχιστη (Dassios, 2012). Η συνάρτηση της απόστασης των δύο σημείων είναι

$$f(x_{di}, y_{di}, z_{di}) = (x_i - x_{di})^2 + (y_i - y_{di})^2 + (z_i - z_{di})^2$$

Έτσι τα σημεία \mathbf{r}_{di} ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση f με τη προϋπόθεση ότι ανήκουν στην επιφάνεια E, δηλαδή γι' αυτά ισχύει ότι

$$g(x_{di}, y_{di}, z_{di}) = \frac{x_{di}^2}{a^2} + \frac{y_{di}^2}{b^2} + \frac{z_{di}^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange (Brand, (2006), Fusco, (1996)) επάγεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

και από την επίλυσή του προκύπτει η εξίσωση έκτου βαθμού ως προς λ

$$\frac{a^2 \cdot x_i^2}{(a^2 - \lambda_i)^2} + \frac{b^2 \cdot y_i^2}{(b^2 - \lambda_i)^2} + \frac{c^2 \cdot z_i^2}{(c^2 - \lambda_i)^2} = 1$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει έως έξι πραγματικές ρίζες, ως εξίσωση έκτου βαθμού, εκ των οποίων κάθε μία αντιστοιχεί σε ένα ακρότατο της f **Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.** υπό την συνθήκη g . Το λ που παρέχει την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f δίνει, μέσω των (3) και (4) το ζητούμενο σημείο \mathbf{r}_{di} . Στη συνέχεια, υπολογίζεται το γεωμετρικό υψόμετρο κάθε σημείου \mathbf{r}_i ως προς την επιφάνεια του τριαξονικού ελλειψοειδούς E,

$$h_E(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_{di}^2}{a^4} + \frac{y_{di}^2}{b^4} + \frac{z_{di}^2}{c^4}}} \left| \frac{x_i x_{di}}{a^2} + \frac{y_i y_{di}}{b^2} + \frac{z_i z_{di}}{c^2} - 1 \right|$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί επαναλαμβάνονται για κάθε δοσμένο σημείο μέτρησης $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, k$.

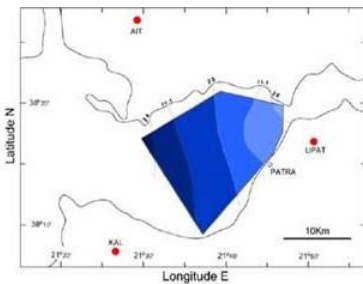
Γ. Σύγκριση του Τριαξονικού Ελλειψοειδούς E και του ΕΕΠ WGS84

Στη συνέχεια εκτιμάται η συνεισφορά του τοπικού τριαξονικού ελλειψοειδούς μοντέλου του γεωειδούς στην γεωμετρική περιγραφή του γεωειδούς, με σύγκριση του μέσου τετραγωνικού υψόμετρου που προκύπτει από τα παραπάνω αποτελέσματα με τα αντίστοιχα υψόμετρα που παρέχει το GRS84. Ακόμα, συγκρίνεται το βέλτιστο ελλειψοειδές που παρέχει ο αλγόριθμος για κάθε επιλεγμένη περιοχή και εκτιμάται το εύρος της περιοχής της επιφάνειας της Γης στο οποίο το ελλειψοειδές πρότυπο είναι ικανοποιητικό ως τοπικό πρότυπο και, κατά συνέπεια, ως βέλτιστη τοπική επιφάνεια αναφοράς για τον ορθομετρικό προσδιορισμό των σημείων της περιοχής αυτής.

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

A. Πατραϊκός κόλπος

Η πρώτη περιοχή στην οποία έγινε αριθμητική εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας ανήκει στον Πατραϊκό κόλπο. Για τη περιοχή αυτή, είχαμε δεδομένες τις καρτεσιανές συντεταγμένες και το γεωμετρικό υψόμετρο ως προς το ΕΕΠ WGS84, 50 σημείων μεταξύ ($\varphi = 38.29$ $\lambda = 21.5$) Βορειοδυτικά και ($\varphi = 38.21$ $\lambda = 21.68$) στα Νοτιοανατολικά στον Πατραϊκό κόλπο, καταναμημένων σε έναν κύκλο με ακτίνα 2 εκατοστά της μοίρας (Lycourghiotis, 2017a) (Σχ.1).



Σχήμα 1: Η περιοχή μελέτης στον Πατραϊκό κόλπο

Με αντικατάσταση των συντεταγμένων αυτών στην (1), προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα με 50 εξισώσεις και 3 αγνώστους. Εφαρμογή του ψευδοαντίστροφου του Moore – Penrose μας δίνει το βέλτιστο τριαξονικό Ελλειψοειδές με ημιάξονες:

$$a = 6,37797 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$b = 6,37907 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$c = 6,35685 \cdot 10^6 \text{m}$$

Η εξίσωσή του αντίστοιχα

$$\frac{x^2}{4,06785 \cdot 10^{13}} + \frac{y^2}{4,06925 \cdot 10^{13}} + \frac{z^2}{4,04095 \cdot 10^{13}} = 1.$$

Η διαφορά από τους ημιάξονες του ΕΕΠ WGS84 είναι:

$$\Delta a = 167\text{m}, \Delta b = -933\text{m}, \Delta c = 67,3\text{m}$$

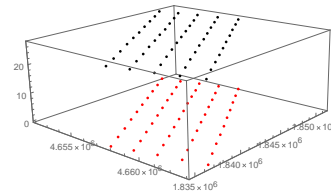
Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, υπολογίστηκε το γεωμετρικό υψόμετρο h_E κάθε σημείου από το Ελλειψοειδές E και, υπολογίστηκε η μέση διαφορά από το αντίστοιχο υψόμετρο h_{WGS84} του WGS84 και βρέθηκε ότι είναι:

$$\overline{h_E} = 0,0702144\text{m}$$

$$\overline{h_{WGS84}} = 26,5796\text{m}$$

$$\overline{h_{WGS84}} - \overline{h_E} = 26,5094\text{m}$$

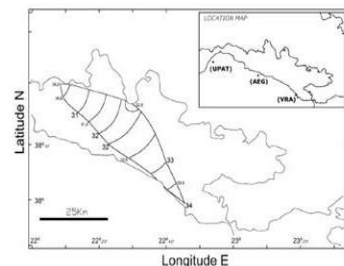
δηλαδή η μέση διαφορά είναι της τάξεως των 26m. Στο Σχ.2 φαίνεται η κατανομή των γεωμετρικών υψόμετρων h_E και h_{WGS84} για κάθε σημείο.



Σχήμα 2: Η κατανομή των γεωμετρικών υψόμετρων h_E και h_{WGS84} για κάθε σημείο του Πατραϊκού κόλπου.

B. Κορινθιακός κόλπος

Ο Κορινθιακός κόλπος, είναι η δεύτερη περιοχή μελέτης. Το μέγιστο μήκος του είναι 90km και το μέγιστο πλάτος του 25km. Γενικά, είναι μια περιοχή μεγάλου γεωλογικού και γεωφυσικού ενδιαφέροντος. Όσον αφορά το τοπικό γεωειδές είναι πιθανόν να επηρεάζεται από τη μεγάλη σεισμικότητά του και τον υψηλό ρυθμό κατακόρυφης μετακίνησής του (0,003m ετησίως). Η μελέτη έχει γίνει σε 41 δεδομένα σημεία καταναμημένα σε κύκλο με ακτίνα 2 εκατοστά της μοίρας (Lycourghiotis, 2017b) ενώ η περιοχή στην οποία ανήκουν φαίνεται στο Σχ.3.



Σχήμα 1: Η περιοχή μελέτης στον Κορινθιακό κόλπο

Στη περιοχή αυτή χρησιμοποιήθηκε το Τριαξονικό ελλειψοειδές που προσδιορίστηκε παραπάνω και το οποίο προσεγγίζει βέλτιστα το Πατραϊκό κόλπο. Υπολογίσαμε τα αντίστοιχα γεωμετρικά υψόμετρα της περιοχής του Κορινθιακού κόλπου και τα αποτελέσματα, που υποδεικνύουν μέση διαφορά των γεωμετρικών υψόμετρων είναι της τάξεως των 30m είναι ως εξής:

$$\overline{h_{WGS84}} = 32,3293\text{m}$$

$$\overline{h_{3DE}} = 2,2901\text{m}$$

$$\overline{h_{WGS84}} - \overline{h_{3DE}} = 30,0392\text{m}$$

Γ. Πατραϊκός και Κορινθιακός κόλπος

Θεωρώντας και τις δυο περιοχές μαζί Πατραϊκό και Κορινθιακό κόλπο δηλαδή αυξάνοντας την έκταση της περιοχής μελέτης, ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία για τον υπολογισμό του βέλτιστου ελλειψοειδούς και των αντίστοιχων γεωμετρικών υψομέτρων. Το βέλτιστο 3ΔΕ βρέθηκε να δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4,0683 \cdot 10^{13}} + \frac{y^2}{4,06929 \cdot 10^{13}} + \frac{z^2}{4,04032 \cdot 10^{13}} = 1$$

Η διαφορά των ημιαξόνων του από το ελλειψοειδές αναφοράς WGS84 είναι

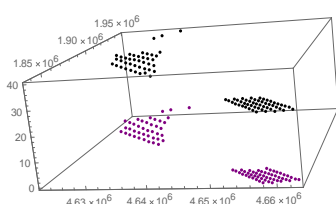
$$\Delta a = -183\text{m}, \Delta b = -963\text{m} \text{ και } \Delta c = 402,3\text{m}$$

ενώ το αντίστοιχο μέσο τετραγωνικό γεωμετρικό υψόμετρο είναι, σε κάθε περίπτωση

$$\overline{h_E} = 0,568252\text{m}$$

$$\overline{h_{WGS84}} = 29,1701\text{m}$$

Η διαφορά $\overline{h_{WGS84}} - \overline{h_E} = 28,6019\text{m}$ είναι της τάξεως των 28m.



Σχήμα 2: Η κατανομή των γεωμετρικών υψομέτρων h_E και h_{WGS84} για κάθε σημείο του Πατραϊκού και Κορινθιακού κόλπου.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μία μέθοδος προσδιορισμού του βέλτιστου τοπικά γεωμετρικού προτύπου του γεωειδούς, ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς E το οποίο εφάπτεται στην περιοχή ενδιαφέροντος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιφάνεια αναφοράς για τον προσδιορισμό σημείων στην επιφάνεια της Γης. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε συγκεκριμένες περιοχές και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα γεωμετρικά υψόμετρα μετρημένα με επιφάνεια αναφοράς το βέλτιστο κάθε φορά ελλειψοειδές, όπως προέκυψε με τη μέθοδο αυτή, είναι της τάξεως των λίγων εκατοστών έναντι των 25 έως 30m που αντιστοιχούν στο Ελλειψοειδές Αναφοράς WGS84. Υποδεικνύεται έτσι, ότι επιτυγχάνεται ικανοποιητική ταύτιση τοπικά, της γεωμετρικής επιφάνειας E και της επιφάνειας της Γης.

Η δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου, όπως το E, που ταυτίζεται τοπικά με το γεωειδές, είτε με το ανάγλυφο της Γης, είναι πολύπλευρα σημαντική καθώς παρέχει τη δυνατότητα προσδιορισμού πραγματικών υψομέτρων και εκπόνησης λεπτομερειικών γεωφυσικών μελετών, καθώς η γνώση των μικρο- και μακρο-διαταραχών της επιφάνειάς του γεωειδούς αποτυπώνουν

γεωλογικές μεταβολές του στερεού φλοιού της γης (όπως υποθαλάσσια ρήγματα, κοιτάσματα κ.α.), οι οποίες παραμένουν, εν πολλοίς, άγνωστες. Τέλος, η γνώση της θαλάσσιας επιφάνειας με υψηλή τοπική ακρίβεια στην ακτογραμμή, μπορεί να συνεισφέρει στην μελέτη των επιπτώσεων της κλιματικής αλλαγής στην θαλάσσια στάθμη μέσω της ακριβούς διερεύνησης των μεταβολών της.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι συγγραφείς θέλουν να ευχαριστήσουν το κ. Λυκουργιώτη Σωτήριο, για την ευγενική παραχώρηση των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στα αριθμητικά πειράματα της παρούσας εργασίας καθώς και για τις πολύ χρήσιμες συζητήσεις επί του θέματος.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Brand L., (2006). *Vector Analysis*, Dover Publications Inc.
- Colombo, O. (1981). *Numerical methods for harmonic analysis on the sphere*. OSU Rep. 310, Columbus, Ohio.
- Dassios G., (2012). *Ellipsoidal Harmonics Theory and Applications*, Published in the United States of America by Cambridge University Press.
- Fusco N. –Marcellini P. –Sbordone C., (1996). *Analisi Matematica due*, Liguori Editore.
- Lycourghiotis S., (2017a) “Improvements of GNSS-on-boat methodology using a catamaran platform: application at the gulf of Patras” 7th International Conference on Experiments / Process / System Modeling / Simulation / Optimization, Athens, Greece, 5-8 July 2017, Vol. I, pp. 255-261. ISSN: 2241-9209, ISBN SET: 978-618-82173-2-4, ISBN Vol. I: 978-618-82173-3-1.
- Lycourghiotis S., (2017b) “Developing a GNSS-on-boat based technique to determine the shape of the sea surface” 7th International Conference on Experiments / Process / System Modeling / Simulation / Optimization, Athens, Greece, 5-8 July 2017, Vol. I, pp. 113-119. ISSN: 2241-9209, ISBNSET: 978-618-82173-2-4, ISBN Vol. I: 978-618-82173-3-1.
- Mather, R.S. (1973). *Four dimensional studies in earth space*. Bull. Good.108: 187 – 206.
- Moritz, H. (1970). *Least-squares estimation in physical geodesy*. DGK, A 69, München (OSU Rep. 130, Columbus, Ohio).
- O’ Neil B., (2002), *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Salmon G., (1885). *A treatise on the Analytic Geometry In Three Dimensions*, Dublin, Hodges, Figgis & Co.
- Torge W., (2001). *Geodesy*, Walter de Gruyter.
- Wenzel, H.G. (1989). *On the definition and numerical computation of free air gravity anomalies*. Bull.d’Inf. Bur.Gravim. Int. 64: 23-31.
- Δάσιος Γ., (2001). *Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Λιβιεράτος Ε., Φωτίου Α., (1996). *Ελλειψοειδής Γεωδαισία και Γεωδαιτικά Δίκτυα*, Εκδόσεις Ζήτη.
- Φωτίου Α., (2007). *Γεωμετρική Γεωδαισία*, Εκδόσεις Ζήτη.