Πυθαγόρεια Αριθμητική και το Πέρασμα από την Αριθμητική στην Αλγεβρική Σκέψη με Μαθητές Γυμνασίου

Φίλιππος Γαρουφαλίδης
Μαθηματικός & Μετ. Φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
st101195@ac.eap.gr

Κώστας Νικολαντωνάκης
Καθηγητής & Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
knikolantonakis@uowm.gr

Περίληψη – Κατά το πέρασμα από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική οι μαθητές συναντούν πολλές δυσκολίες και εμπόδια. Είναι ένα ζήτημα που έχει απασχολήσει αρκετά τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι περισσότερες μελέτες έως σήμερα όμως διαχωρίζουν τους δύο παραπάνω τρόπους σκέψης σαν δύο ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάδειξη της δομής της αριθμητικής-αλγεβρικής σκέψης η οποία θα παρέχει ένα τρόπο μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη του μαθητή. Σε αυτό το πλαίσιο μελετώνται τα στοιχεία που είναι απαραίτητα έτσι ώστε να ενισχυθεί η σχέση μεταξύ της αριθμητικής και της αλγεβρικής ικανότητας που αναμένεται να αναπτύξουν στην συνέχεια. Επιπλέον, διερευνάται ο κατάλληλος ΜΧΕ για τη δημιουργία και ενίσχυση αυτής της δομής και ποιο ρόλο μπορεί να διαδραματίσει η Ιστορία των Μαθηματικών και η Τεχνολογία στη διδασκαλία. Πιο συγκεκριμένα εξετάζεται η επίδραση που έχει η μελέτη της Πυθαγόρειας αριθμητικής για την εύρεση ενός τρόπου υπολογισμού κάθε τριγωνικού αριθμού και η χρήση κατάλληλου λογισμικού για επαλήθευση και επιβεβαίωση.

Λέξεις-Κλειδιά: Πυθαγόρεια Αριθμητική, Ιστορία Μαθηματικών, Αριθμητική-Αλγεβρική Σκέψη, Μαθηματικοί Χώροι Εργασίας, Μέθοδος ACODESA

I. Εισαγωγή

Η αριθμητική ικανότητα είναι αναγκαία για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και διαδραματίζει βασικό ρόλο στην διδασκαλία των Μαθηματικών από το Δημοτικό Σχολείο. Οι Verschaffel και De Corte (1996) αναφέρουν τις ικανότητες που αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές στο Δημοτικό σημειώνοντας ότι αυτές είναι: 1) η αντίληψη και η έννοια του αριθμού, 2) το νόημα των αριθμητικών συμβόλων, 3) ο χειρισμός βασικών αριθμητικών δεδομένων, 4) οι νοεροί και γραπτοί υπολογισμοί και 5) τα λεκτικά προβλήματα, ως εφαρμογές σε αριθμητικά προβλήματα.

Το ερώτημα είναι, κατά πόσο οι παραπάνω ικανότητες επαρκούν ώστε να αναπτυχθεί η αριθμητική σκέψη του μαθητή, η οποία είναι απαραίτητη όταν αυτός εισέρχεται στο Γυμνάσιο όπου θα κληθεί να αντιμετωπίσει προβλήματα που απαιτούν αλγεβρική σκέψη.

Κατά τον Kaput (1998) η αλγεβρική σκέψη χαρακτηρίζεται: 1) ως μέσο γενίκευσης και φορμαλισμού της αριθμητικής, 2) ως οδηγός χειρισμού μεταβλητών, 3) ως η μελέτη της δομής και του οικοδομήματος των Μαθηματικών μέσα από πράξεις και σχέσεις, 4) ως η μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και εξαρτημένων μεταβλητών και 5) ως μοντελοποίηση.

Ένα πρόβλημα κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι το γεγονός ότι οι μαθητές θεωρούν την άλγεβρα μια διαφορετική γνώση, όπου οι αριθμητικές ικανότητες δεν έχουν καμία εφαρμογή. Ένα άλλο ζήτημα είναι ότι ο μαθητής μπορεί να μην αναγνωρίζει ότι αυτό που καλείται να αντιμετωπίσει απαιτεί αριθμητικές ικανότητες ή αλγεβρική σκέψη.

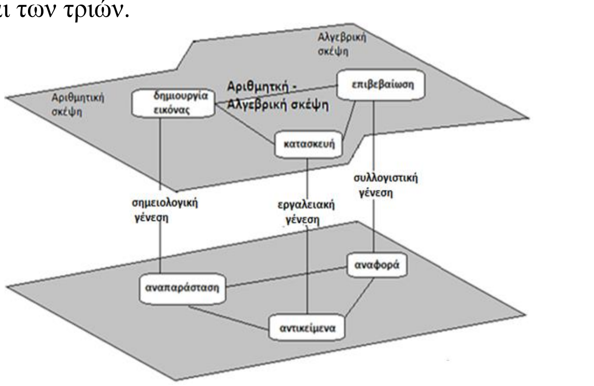
Η έρευνα αυτή προτείνει την ανάπτυξη μιας γνωσιακής δομής, της αριθμητικής-αλγεβρικής σκέψης του μαθητή, η οποία θα παρέχει σε μαθητές Γυμνασίου μία γέφυρα μεταξύ των αριθμητικών ικανοτήτων που πιθανόν να απέκτησαν στο Δημοτικό και των αλγεβρικών ικανοτήτων που αναμένεται να αναπτύξουν στο Γυμνάσιο.

II. Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία της έρευνας βασίζεται στην μέθοδο ACODESA μέσω ενός συνεργατικού περιβάλλοντος όπου προτείνονται δραστηριότητες με φύλλα εργασίας (3 στην εργασία αυτή) με εργαλεία το χαρτί, το μολύβι και τον Η/Υ που προάγουν τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών. Τα βήματα της μεθόδου είναι: 1) *Ατομική εργασία (Individual work)*, όπου οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν μόνοι τους ένα καινούργιο ζήτημα-πρόβλημα με στόχο την δημιουργία αυθόρμητων, εσωτερικών αναπαραστάσεων σε ατομικό επίπεδο που επιτρέπει την παραγωγή απόψεων για το θέμα (σημειολογική γένεση), 2) *Ομαδική εργασία (Teamwork)*, με στόχο την ανταλλαγή των ατομικών απόψεων των μαθητών μέσα στην ομάδα. Αποτελεί ένα αρχικό στάδιο επιβεβαίωσης της γνώσης (validation) καθώς οι μαθητές καλούνται να παρουσιάσουν την γνώμη τους και να την υπερασπιστούν, αιτιολογώντας με επιχειρήματα, 3) *Συζήτηση στην ολομέλεια (Debate)*, 4) *Αναστοχασμός (Self – reflection)*, οι μαθητές καλούνται να λύσουν ξανά το ίδιο πρόβλημα μόνοι τους, σαν εργασία για το σπίτι. Σκοπός αυτού του βήματος είναι η αναδημιουργία των αναπαραστάσεων που έγιναν στην τάξη και 5) *Θεσμοθέτηση της γνώσης (Institutionalization of* *knowledge) όπου* ο καθηγητής συνοψίζει όλες τις απόψεις και τα αποτελέσματα των εργασιών, λαμβάνει όλες τις παραγωγές των μαθητών και όπου παρουσιάζει τα επιστημονικά ορθά αποτελέσματα.

Για την ανάλυση των παραγωγών των μαθητών χρησιμοποιήθηκε ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας για την ανάπτυξη της αριθμητικής – αλγεβρικής σκέψης. Σύμφωνα με τους Hitt, Saboya, Zavala (2015), για την δημιουργία της γνωσιακής δομής της αριθμητικής – αλγεβρικής σκέψης απαιτούνται τρία στάδια: (α) μια ανάμειξη των αυθόρμητων, ατομικών αναπαραστάσεων με τις πραγματικές, ορθά αποδεκτές. Η μίξη αυτή θα πρέπει να γίνει σε περιβάλλον μάθησης, (β) η ανάπτυξη ενός γνωσιακού σχήματος ελέγχου. Η απλή απεικόνιση ενός τριγωνικού αριθμού θα πρέπει να συνδεθεί με τις σχέσεις μεταξύ αριθμών για κάθε τριγωνικό αριθμό και (γ) μια διαδικασία γενίκευσης όπου οι γενικεύσεις μπορεί να είναι οπτικές, προφορικές, αριθμητικές ή και αλγεβρικές. Περισσότερο σημαντικές όμως είναι οι συνδέσεις-τομές αυτών των γενικεύσεων.

Μέσω καθοδηγούμενης διδασκαλίας ενθαρρύνεται η δημιουργία σημειολογικών, εργαλειακών και συλλογιστικών διεργασιών. Οι διεργασίες αυτές αναπτύσσονται ξεχωριστά αλλά απαιτείται η συνέργεια και των τριών.



Σχήμα 1. ΜΧΕ και οι γενέσεις

Τα ερευνητικά ερωτήματα αφορούσαν τον κατάλληλο ΜΧΕ (Kuzniak & Richard, 2015) για την δημιουργία και ενίσχυση αυτής της γνωσιακής δομής και με ποιο τρόπο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία προς αυτήν την κατεύθυνση. Επίσης ένα άλλο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε το «Πως μπορεί αυτή η γνωσιακή δομή να παραμείνει σταθερή μετά από ένα χρονικό διάστημα.» Επιπλέον, εξετάζονται οι συνέπειες, θετικές ή αρνητικές, που μπορεί να έχει η χρήση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών (Jankvist, 2009).

Με βάση τα παραπάνω ακολουθήσαμε την παρακάτω πορεία:

ΒΗΜΑ 1, Ατομική δραστηριότητα με χαρτί και μολύβι όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τα φύλλα εργασίας με τους τριγωνικούς αριθμούς. Οι πρώτες πέντε ερωτήσεις είχαν σχεδιαστεί για την ανάπτυξη της μοντελοποίησης, της αφαιρετικής ικανότητας και της ικανότητας για γενίκευση. Ο φυσικός χώρος εργασίας αποτελείται από το φύλλο εργασίας, το μολύβι και τα σχεδιαγράμματα. Οι αυθόρμητες αναπαραστάσεις παράγονται όταν οι μαθητές προσπαθούν να μοντελοποιήσουν τους τριγωνικούς αριθμούς (σημειολογική γένεση).

1) Παρατηρήστε προσεκτικά τους παραπάνω αριθμούς. Ποιος είναι ο πέμπτος (5ος) στη σειρά τριγωνικός αριθμός; Από πόσες κουκκίδες αποτελείται; Μπορείτε να τον σχεδιάσετε; Μπορείτε να εξηγήσετε πως τον βρήκατε;
2) Κατά την άποψη σας, πως κατασκευάζονται οι τριγωνικοί αριθμοί; Πόσο διαφέρει κάθε τριγωνικός αριθμός από τον προηγούμενο του;
3) Ποιος είναι ο δέκατος (10ος) στη σειρά τριγωνικός αριθμός; Να εξηγήσετε πως τον βρήκατε.
4) Γράψτε ένα γράμμα, μία μικρή έκθεση, σε ένα φίλο σας εξηγώντας του πως να βρει τον εικοστό (20ο) τριγωνικό αριθμό. ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ.
5) Υπάρχει τρόπος να υπολογίσουμε τον εικοστό (20ο) στη σειρά τριγωνικό αριθμό χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τους 19 προηγούμενους;

Σχήμα 2. 1ο Ατομικό φύλλο εργασίας

Με την πρώτη ερώτηση, υποκινούμε την αριθμητική σκέψη του μαθητή. Ωστόσο, με την αιτιολόγηση της απάντησης από τον μαθητή στοχεύουμε στην γέννηση της αλγεβρικής σκέψης, μέσω της αντίστροφης νοητικής διαδικασίας. Στο στάδιο αυτό, δεν έχει δημιουργηθεί η γνωσιακή δομή της αλγεβρικής σκέψης παρά μόνο μια αρχική προσέγγισή της. Απλά παροτρύνουμε τους μαθητές να συνεχίσουν την σειρά των σχεδιαγραμμάτων (εργαλειακή γένεση). Σκοπός της δεύτερης ερώτησης είναι η ενίσχυση της αριθμητικής αλλά και της αλγεβρικής σκέψης του μαθητή. Με την τρίτη και τέταρτη ερώτηση, οι μαθητές καλούνται να αλλάξουν το τρόπο που σκέφτονται. Η δραστηριότητα στοχεύει σε έναν άλλο τρόπο αναπαράστασης, της νοητής. Σίγουρα, δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε με το χέρι τους 10 πρώτους τριγωνικούς αριθμούς, πόσο μάλλον τους πρώτους 20. Θα πρέπει να σκεφτούμε μια διαδικασία γενίκευσης. Οι μαθητές παρατηρούν ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του σχεδιαγράμματος και των αριθμών. Στο στάδιο αυτό ενισχύεται η σημειολογική γένεση (semiotic genesis) μεταξύ της οπτικής αναπαράστασης του αντικειμένου και της αριθμητικής απεικόνισής του. Σκοπός της πέμπτης ερώτησης είναι η αλγεβρική σκέψη του μαθητή (συλλογιστική γέννηση). Οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν μεταβλητές, σύμβολα και γράμματα για την δημιουργία ενός κανόνα, ενός αλγορίθμου για την επίλυση του προβλήματος.

ΒΗΜΑ 2, Ομαδική δραστηριότητα με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Κάθε ομάδα χειρίζεται έναν υπολογιστή, όπου είναι ειδικά διαμορφωμένο το πρόγραμμα Excel. Σε κάθε ομάδα έχει καθοριστεί ένας χειριστής για τον υπολογιστή, ένας που θα συμπληρώνει το φυλλάδιο και ένας που θα παρουσιάσει τα αποτελέσματα. Επιπλέον, δίνεται σε κάθε ομάδα φύλλο οδηγιών για το Excel. Οι μαθητές, εφόσον έχουν εργαστεί ατομικά καλούνται να εργαστούν και ομαδικά. Οι ερωτήσεις είναι παρόμοιες με το ατομικό φύλλο εργασίας. Ωστόσο, ο σκοπός τους είναι η ενίσχυση της αριθμητικής – αλγεβρικής σκέψης μέσω της επανάληψης. Η κατανόηση μιας νέας έννοιας χρειάζεται μια κυκλική διαδικασία (Engeström, 1999). Μια ακολουθία δραστηριοτήτων που ευνοεί την ανάμειξη των ατομικών αναπαραστάσεων που εμφανίστηκαν στο προηγούμενο στάδιο. Η μίξη αυτή θα πρέπει να γίνει σε πολιτισμικό περιβάλλον μάθησης, αφού ενδέχεται τα σύμβολα που έχουν χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές να μην έχουν την ίδια έννοια.

Εφαρμόζοντας τις ίδιες σκέψεις με πριν, αλλά τώρα χρησιμοποιώντας τον Η/Υ να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

6) Πως θα βρείτε τον $6^{ο}$, $7^{ο}$ και $8^{ο}$ τριγωνικό αριθμό;

7) Είναι δυνατόν να υπολογίσετε,

Τον τριακοστό ($30^{ο}$) τριγωνικό αριθμό: ....

Τον ογδοηκοστό τρίτο ($83^{ο}$) τριγωνικό αριθμό: ....

Τον εκατοστό ($100^{ο}$) τριγωνικό αριθμό: ....

8) Εξηγείστε πως τους βρήκατε. Υπάρχει κάποιος περιορισμός στην μέθοδο που χρησιμοποιείτε; Για παράδειγμα, αλλάζει ο τρόπος υπολογισμού εάν ο τριγωνικός αριθμός είναι μονός ή ζυγός;

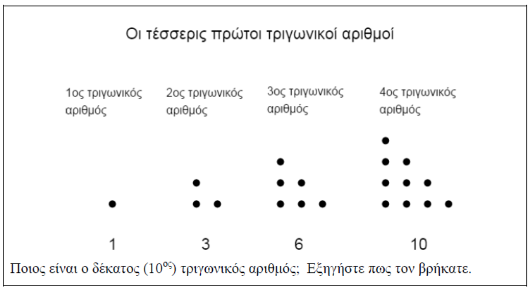
9) Γράψτε όλα τα πρόσημα, τα σύμβολα και τις μεταβλητές που χρησιμοποιήσατε για να βρείτε τους τριγωνικούς αριθμούς.

Σχήμα 3. $2^{ο}$ φύλλο εργασίας ανά ομάδα

Επιπλέον, η εργασία σε ομάδες και η χρήση της τεχνολογίας ενισχύουν την διαδικασία γενίκευσης και επιβεβαίωσης μιας άποψης.

ΒΗΜΑ 3, (Επιστημονική) συζήτηση στην ολομέλεια. Εφόσον έχουν απαντηθεί οι πρώτες ερωτήσεις, οι μαθητές πλέον έχουν έναν τρόπο, ένα αριθμητικό μοτίβο ώστε να βρίσκουν κάθε τριγωνικό αριθμό. Οι μαθητές πλέον γνωρίζουν. Πρόκειται για σημειολογική, εργαλειακή και συλλογιστική γένεση. Οι μαθητές πλέον έχουν περάσει από την απλή αριθμητική σκέψη στην απλή αλγεβρική σκέψη έχοντας δημιουργήσει την δομή της αριθμητικής-αλγεβρικής σκέψης. Ο καθηγητής είναι υπεύθυνος έτσι ώστε να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει τις παραγωγές των μαθητών. Πρόκειται για το στάδιο της επιβεβαίωσης της γνώσης.

ΒΗΜΑ 4, Αναστοχασμός όπου μετά από χρονικό διάστημα 20-30 ημερών οι 5 μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ατομικά φύλλα εργασίας ως δραστηριότητα για το σπίτι.

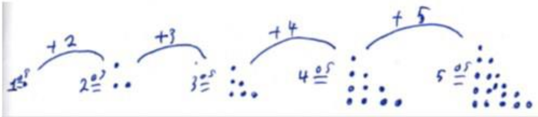


Σχήμα 4. $3^{ο}$ φύλλο εργασίας για αναστοχασμό

Επειδή έχει παρατηρηθεί το εφήμερο της γνώσης, σε πολλούς μαθητές σκοπός αυτού του βήματος είναι να ελέγξουμε εάν οι μαθητές έχουν αποκτήσει αριθμητική-αλγεβρική σκέψη ή εάν έχουν παραμείνει στην αριθμητική σκέψη. Ενδέχεται κάποιος μαθητής να μην έχει πειστεί ότι υπάρχει ένας τύπος που να λύνει το πρόβλημα των τριγωνικών αριθμών και να επιστρέψει στην αρχική του προσέγγιση, ίσως σχεδιάζοντας απλά τριγωνικούς αριθμούς.

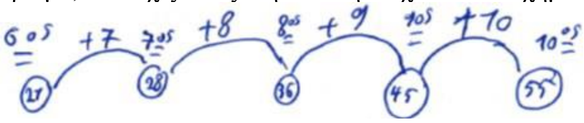
III. Επιλεγμένα Αποτελέσματα

Όλοι οι μαθητές σχημάτισαν τον 5ο στη σειρά τριγωνικό αριθμό, ακολουθώντας την προτροπή της εκφώνησης της άσκησης. Παρατηρούμε ότι, τα ορατά αντικείμενα (κουκκίδες), σε συνδυασμό με τα χειροπιαστά εργαλεία (χαρτί, μολύβι) ενισχύουν την δημιουργία της αριθμητικής-αλγεβρικής σκέψης. Οι μαθητές Κ, Β και Ζ καταλαβαίνουν τη σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών παρατηρώντας την σχηματική τους αναπαράσταση. Πρόκειται για σημειολογική γένεση που ενισχύει την κατασκευή και την δημιουργία εικόνας, δηλαδή την μοντελοποίηση. Επιπλέον η κατασκευή του σχήματος του 5ου τριγωνικού αριθμού ενισχύει την εργαλειακή γένεση. Ο μαθητής Κ εξηγεί πως κατασκευάζονται οι τριγωνικοί αριθμοί με τη βοήθεια του σχήματος:



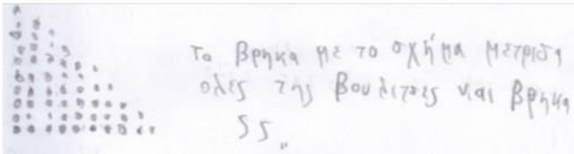
Σχήμα 5. Απάντηση $2^{ης}$ ερώτησης

Έτσι είναι σε θέση να κατασκευάσει τον 10ο τριγωνικό αριθμό, συνεχίζοντας την αλληλουχία των σχημάτων:



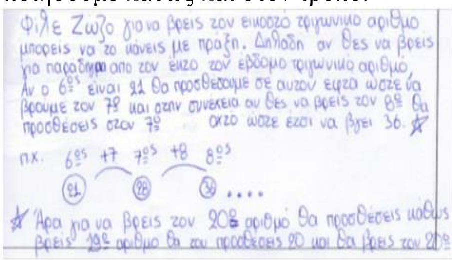
Σχήμα 5. Απάντηση $3^{ης}$ ερώτησης

Ο μαθητής Β κατανοεί τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζονται οι τριγωνικοί αριθμοί. Έτσι, προτίμησε να σχεδιάσει προσεκτικά τον 10ο τριγωνικό αριθμό και να μετρήσει τις κουκκίδες:



Σχήμα 6. Απάντηση $3^{ης}$ ερώτησης

Βλέπουμε (παρακάτω) μια απάντηση της $4^{ης}$ ερώτησης όπου γίνεται διαχωρισμός μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης. Διαχωρίζεται η αριθμητική ικανότητα από την αλγεβρική ικανότητα. Οι μαθητές δεν κάνουν τις πράξεις (αριθμητική), εξηγούν με χρήση συμβόλων τον τρόπο, το πως (αλγεβρική σκέψη). Γίνεται αναφορά στα σύμβολα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καθώς και στον τρόπο.



Σχήμα 7. Απάντηση $4^{ης}$ ερώτησης

Στην $5^{η}$ ερώτηση οι μαθήτριες Ζ και Δ, αρχίζουν τις προσθέσεις: 1+2+3+...+20. Η μαθήτρια Ζ κατά την διάρκεια των διαδοχικών υπολογισμών παρατηρεί ότι: 20+1=21, 19+2=21, 18+3=21, ... , 11+10=21. Ενώ, οι μαθητές Θ και Β παρατηρούν ότι για να υπολογισθεί το άθροισμα: 20 + 19 +18 + ... + 3 + 2 + 1 αρκεί να πολλαπλασιάσουμε 10x21, γιατί έχουμε 10 τέτοια αθροίσματα του 21.

Τονίζεται ότι και πάλι έχουμε μια αριθμητική διαδικασία. Δηλαδή ότι απλώς έχουμε βρει έναν άλλο τρόπο να υπολογίσουμε το άθροισμα. Σε αυτό το σημείο υπήρξε προτροπή από τον Καθηγητή ρωτώντας «Μπορούμε να βρούμε έναν άλλο τρόπο;» Οι μαθητές πλέον, μπορούν να υπολογίσουν κάθε τριγωνικό αριθμό. Έχουν δύο τρόπους να το κάνουν, είτε υπολογίζοντας κάθε τριγωνικό αριθμό μέχρι τον ζητούμενο είτε υπολογίζοντας το άθροισμα. Παρατηρούν ωστόσο, τους περιορισμούς των παραπάνω τρόπων στην περίπτωση των μεγάλων αριθμών. Έτσι, παροτρύνονται να χρησιμοποιήσουν μεταβλητές, το γράμμα n συγκεκριμένα, για να καταλήξουν σε έναν κανόνα ώστε να υπολογίζουν με άλλο τρόπο τον νιοστό τριγωνικό αριθμό καλλιεργώντας την ικανότητα για γενίκευση.

Καθ.: Η πράξη που έχουμε καταλήξει, για τον υπολογισμό του 20ου τριγωνικού αριθμού είναι 21x10. Σωστά;

Μαθ.: Σωστά.

Καθ.: Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω πράξη με όρους του 20;

Μαθ.Β: Ναι, είναι (20+1)×(20/2).

Καθ.: Για τον νιοστό αριθμό τι θα κάνουμε;

Μαθ. Κ: Θα κάνουμε: $(n+1)\times(n/2)$.

Στην 8η ερώτηση η ομάδα ΖΔ σημειώνει ότι πλέον μπορούμε με τον τύπο να βρούμε όποιον τριγωνικό αριθμό θέλουμε, ανεξάρτητα αν είναι μονός ή ζυγός: ‘’Μπορούμε να τα βρούμε όλα’’.

IV. Συμπεράσματα

Η παρουσίαση της μελέτης των σχηματικών αριθμών από τους Πυθαγόρειους προκάλεσε την κινητοποίηση και το ενδιαφέρον των μαθητών. Η ιστορική αυτή προσέγγιση του ζητήματος βοήθησε στο να φανούν τα Μαθηματικά λιγότερο τρομακτικά και να τονιστεί ότι είναι μια επιστήμη που εξελίσσεται, έχει σταθερές βάσεις και δεν προέρχεται από το τίποτα, είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα. Η ενασχόληση των μαθητών με τα ορατά αντικείμενα, σχηματικοί και τριγωνικοί αριθμοί, προκάλεσε το ενδιαφέρον τους και κινητοποίησε την μαθηματική τους σκέψη. Το συλλογικό περιβάλλον μάθησης ενίσχυσε την παραγωγή σκέψης. Οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και η προσοχή τους εντάθηκε όταν ο μαθητής Κ παρουσίασε στο πίνακα της τάξης την δική του απάντηση για το πως παράγονται οι τριγωνικοί αριθμοί. Η επικοινωνία των μελών της ομάδας αλλά και ο επιστημονικός διάλογος στην ολομέλεια διαμόρφωσε τον φυσικό χώρο για να γίνει μίξη των λειτουργικών αναπαραστάσεων με τις προσωπικές αναπαραστάσεις και τις παραγωγές των μαθητών και αποτέλεσε τη φυσιολογική πορεία προς τις θεσμικές αναπαραστάσεις. Το λογισμικό βοήθησε στην γρήγορη επαλήθευση των αποτελεσμάτων, ενίσχυσε την αλγεβρική σκέψη του μαθητή, καθώς αυτός προσανατολίστηκε στο πως θα βρει την απάντηση και όχι στις πράξεις. Ο ρόλος του δασκάλου ήταν να παροτρύνει την ανταλλαγή των απόψεων των μαθητών και να μην παρεμβαίνει παρουσιάζοντας δογματικά τις σωστές απαντήσεις. Από την άλλη οι μαθητές βιαζόντουσαν να απαντήσουν, δυσκολεύονταν να περιγράψουν και να εξηγήσουν το πως απαντούν στα ερωτήματα και παρουσίασαν ασυμφωνία μεταξύ προφορικού και γραπτού λόγου και τι πραγματικά θέλουν να πουν. Σε όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων οι μαθητές διερωτώνται: ‘’Ποιο είναι το σωστό; Αυτό που σκέφτομαι είναι λάθος; Σωστά το έκανα; Τι πρέπει να κάνω;’’ Ο καθηγητής απαντά ότι πρόκειται για ερευνητική διαδικασία. Τα ερωτήματα αυτά πηγάζουν από τον φόβο της βαθμολόγησης. Στην αρχή της ομαδικής εργασίας, η προσοχή των μαθητών στράφηκε στους Η/Υ. ‘’Τι είναι το πρόγραμμα Excel’’, ‘’Που είναι το επί, που είναι το διά’’. Η τεχνολογία αποτελεί βασικό συστατικό ενός ΜΧΕ. Η σωστή χρήση της όμως είναι ένα ζήτημα που ξεπερνά τα όρια της παρούσας εργασίας. Κατά την ομαδική εργασία υπήρχε ισορροπία μεταξύ των μελών της ομάδας. Οι δύο ομάδες όμως ήταν ανταγωνιστικές μεταξύ τους. Τις ενδιαφέρει το τι έχει απαντήσει η άλλη ομάδα ή ποια θα τελειώσει πρώτη. Το γεγονός ότι μετά από ένα σύντομο σχετικά χρονικό διάστημα οι μαθητές είχαν ξεχάσει τον τύπο υπολογισμού για κάθε τριγωνικό αριθμό είναι προβληματικό. Μια αιτία ίσως είναι η μεταβλητή n που χρησιμοποιήσαμε. Ίσως θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ένα καταλληλότερο γράμμα, το γράμμα τ συγκεκριμένα, που έχει άμεση σχέση με το θέμα. Το ερώτημα λοιπόν που παραμένει είναι πως μπορεί η γνώση να είναι ποιοτική και να παραμείνει στους μαθητές για πάντα;

Στα θετικά στοιχεία μπορούμε να αναφέρουμε ότι σε όλους τους μαθητές, παρέμεινε η μελέτη των τριγωνικών αριθμών. Ειδικότερα, οι μαθητές Β και Κ αναγνωρίζουν πλέον ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ της εικόνας ενός τριγωνικού αριθμού και της αριθμητικής του αναπαράστασης. Σε αυτούς ίσως αναπτύχθηκε περισσότερο η δομή της αριθμητικής-αλγεβρικής σκέψης. Τελικά, όταν χειριζόμαστε χειροπιαστά αντικείμενα και παράγονται αυθόρμητες αναπαραστάσεις, που μπορούν να μετασχηματιστούν σε θεσμικές γύρω από μια μαθηματική έννοια, όταν εργαζόμαστε σε συλλογικό περιβάλλον μάθησης, με επιστημονικό διάλογο και αναστοχασμό μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και ικανότητες.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε πολύ τον Καθηγητή Χαράλαμπο Λεμονίδη από το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen & R. - L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19–38). New York, NY: Cambridge University Press.

Fernando Hitt, Mireille Saboya, Carlos Cortes Zavala (2015). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*, 48: 775-791.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261.

Kaput, J. (1990). *Images of achievable technological future. Proceedings of the fourteenth PME Conference. 1, p. 228 Mexico.*

Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Cham: Springer.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematical education* (pp. 99–137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.