

Διδασκαλία του Λογαρίθμου και της Λογαριθμικής Συνάρτησης με Ιστορική Προοπτική

Νικόλαος Ηλιόπουλος

Μαθηματικός & Μετ. Φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

hliolik@hotmail.g

Κώστας Νικολαντωνάκης

Καθηγητής & Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

knikolantonakis@uowm.gr

Περίληψη – Η παρούσα Διπλωματική Εργασία περιγράφει το σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης σχετικά με τη διδασκαλία των εννοιών του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης με χρήση στοιχείων από την Ιστορία των εννοιών αυτών. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε τμήμα 15 μαθητών/τριών της Β΄ Λυκείου. Η Ιστορία των Μαθηματικών (ΙΜ) χρησιμοποιήθηκε ως «εργαλείο», με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές/τριες. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης έγινε μέσω καθοδηγούμενης ανακάλυψης με χρήση φύλλων εργασίας, με διττή κατεύθυνση.

Με τη χρήση της ΙΜ είχαμε ως σκοπό να διερευνήσουμε την απήχηση που θα έχει στους μαθητές/τριες μια διαφορετική προσέγγιση της διδασκαλίας των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, συνδυάζοντας αυτήν, με τη συνήθη προσέγγιση που γίνεται η διδασκαλία της ενότητας στα περισσότερα σχολεία και φροντιστήρια της χώρας μας, τηρώντας το χρονικό πλαίσιο που ορίζει το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών-Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003).

Στόχος μας ήταν η ενίσχυση του ενδιαφέροντος τους, η παροχή σφαιρικότερης γνώσης, η πρόκληση για προσωπική αναζήτηση και προβληματισμό, μέσω συζητήσεων για το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εποχής επινόησης των λογαρίθμων, μέχρι και σήμερα. Δεδομένου του γεγονότος ότι κανείς από τους μαθητές/τριες μας δεν είχε συναντήσει μέχρι στιγμής σε καμία τάξη του σχολείου του μια αντίστοιχη προσέγγιση, αποτέλεσε επιπλέον ευρύτερο στόχο η ανίχνευση του κατά πόσο μια τέτοια διδακτική προσέγγιση θα μπορούσε να επιτευχθεί στο υπάρχον εκπαιδευτικό πλαίσιο στη χώρα μας και ποια τα πιθανά προβλήματα που θα μπορούσαν να υπάρξουν, όπως και ποιοι οι δυνατικοί τρόποι αντιμετώπισης τους.

Όλα τα προηγούμενα σε συνδυασμό με τις αυξημένες απαιτήσεις ως προς το καθαρά γνωστικό μαθηματικό αντικείμενο και τη θεματολογία του, τη κλιμακούμενη δυσκολία των ασκήσεων αυτής αλλά και με τη προσάρτηση των κατάλληλων και κατά τη γνώμη μας απαραίτητων προεκτάσεων, τόσο στη δυνατότητα και στους τρόπους χρήσης των τεχνολογικών μέσων διδασκαλίας, όσο και στη σύνδεση των εννοιών με το γνωστικό επίπεδο της επόμενης τάξης, αποτέλεσαν το προσωπικό μας διδακτικό «στοίχημα». Αξίζει να υπογραμμίσουμε την ανάδειξη της θετικής συμβολής της ΙΜ στη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, την αλλαγή στάσης και νοοτροπίας των μαθητών/τριών απέναντι στα Μαθηματικά, όπως και την ανάγκη συστηματικότερης έρευνας για την περαιτέρω ενσωμάτωση της στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα.

Λέξεις-Κλειδιά: Λογάριθμος, Λογαριθμική συνάρτηση, Ιστορία Μαθηματικών, Χρήση Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών

I. Εισαγωγή

Ο Hans Freudenthal (1981) αναφέρει την ιστορία ως τον χώρο όπου μπορεί κάποιος να αντλήσει ιδέες και υλικό για τη διδασκαλία.

Αποτελούσε και αποτελεί προσωπική μας άποψη ότι η προσάρτηση της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι δυνατή, αρχικά σε μερικές τουλάχιστον ενότητες, όχι υπό την έννοια της ύπαρξης ιστορικών σημειωμάτων-αναφορών στο τέλος συνήθως των κεφαλαίων στα μαθηματικά σχολικά εγχειρίδια (όπου κατά γενική ομολογία η συντριπτική πλειοψηφία μαθητών αλλά και καθηγητών δεν ασχολούνται με αυτά), αλλά υπό την έννοια της διδασκαλίας τους κατά τη διάρκεια των ενοτήτων ώστε να μπορεί να οδηγήσει στη μεγαλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και συγχρόνως να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών.

Στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας μας παρά τη πρόοδο που έχει σημειωθεί προς την κατεύθυνση αυτή, με τη συγγραφή ιστορικών σημειωμάτων-αναφορών στα σχολικά εγχειρίδια, σύμφωνα με τις οδηγίες του τελευταίου Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), τα αποτελέσματα κρίνονται άκρως απογοητευτικά. Για αυτούς τους λόγους θελήσαμε να σχεδιάσουμε και να εφαρμόσουμε μια διδασκαλία του λογάριθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης με ιστορική προοπτική με χρήση φύλλων εργασίας.

II. Μεθοδολογία

Στην έρευνά μας συμμετείχαν 15 μαθητές της Β΄ Λυκείου οι οποίοι θα ακολουθήσουν και στη Γ΄ Λυκείου κατεύθυνση με βασικό μάθημα τα Μαθηματικά.

Τα Ερευνητικά ερωτήματα μας ήταν: 1) Κατά πόσο μπορεί μια διδακτική προσέγγιση της συγκεκριμένης ενότητας λογαρίθμων και λογαριθμικής συνάρτησης να εμπλουτιστεί με ιστορικές αναφορές-προσεγγίσεις, μέσα στο υπάρχον εκπαιδευτικό πλαίσιο στη χώρα μας; 2) Ποια η απήχηση των μαθητών/τριών σε μια συνδυαστική πρόταση όπως αυτή που επιχειρούμε; Είναι μια τέτοια πρόταση κατά πρώτον μαθησιακά χρήσιμη και κατά δεύτερον εφαρμόσιμη χωρίς να παραμελεί τους στόχους που έχουν τεθεί στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. για το Μαθηματικό γνωστικό αντικείμενο; 3) Ποια τα προβλήματα που ίσως

ανακύψουν και με ποιο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν;

Η συγκεκριμένη εργασία έρχεται να συμπληρώσει το θεωρητικό πλαίσιο που διατυπώθηκε σχετικά με τα θετικά ή αρνητικά της προσάρτησης της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών με μια πρόταση την οποία θα ονομάζαμε συνδυαστική (Tzanakis & al., 2002).

Επιδιώξή μας είναι στο σχεδιασμό της προσέγγισής μας να λάβουμε υπόψη τις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών. Αυτό αποτελεί διδακτικό ζητούμενο κατά Tall (2008) ώστε ο μαθητής/τρια να μπορέσει να κατανοήσει την έννοια του λογαρίθμου και να κάνει χρήση όσων θα διδαχθεί, κατά την επόμενη χρονιά ως μια *met before* γνώση (απαραίτητες νοητικές κατασκευές που δημιουργεί το άτομο ανακαλώντας στη μνήμη του προηγούμενες γνώσεις για να αντιμετωπίσει ένα νέο μαθηματικό πρόβλημα).

Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε στους μαθητές μας τα βασικά στάδια εξέλιξης της έννοιας, αρχής γενομένης από τον εμπνευστή της, τους ανθρώπους που συνέβαλαν σε αυτή, να αποσαφηνίσουμε κάποιες έννοιες όπως του αριθμού «e» και έτσι να υποστηρίξουμε μια διδασκαλία της ενότητας με αναφορές και παραδείγματα από την ιστορία, χωρίς να παραβλέπουμε τις μαθηματικές προεκτάσεις σε ασκήσεις, αλλά και τη χρήση αυτών στην επίλυση προβλημάτων σε διάφορα επιστημονικά πεδία (Anderson & al., 2004).

Απαντήσεις σε διαχρονικά ερωτήματα μαθητών/τριών όπως για παράδειγμα, το πώς φτάσαμε στο σημερινό επίπεδο χρήσης των εννοιών και αν υπάρχει εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στη καθημερινότητα στον πραγματικό κόσμο, φιλοδοξήσαμε να δώσουμε με αυτή τη διδακτική μας προσέγγιση. Επίσης σκοπός μας ήταν να διαπιστώσουμε αν με τον τρόπο αυτό μπορούμε να καταφέρουμε να προσεγγίζουν οι μαθητές μας καθαρά μαθηματικές έννοιες οι οποίες μέσα από ιστορικές αναφορές μπορούν να τους οδηγήσουν αφ' ενός στο να αποκτήσουν κάποιες γενικότερες γνώσεις, να κατανοούν τις έννοιες και να τις κάνουν κτήμα τους αφού το ενδιαφέρον τους θα έχει αυξηθεί και αφετέρου αν θα μπορούσε να προκληθεί μια διάθεση στοχασμού και προσωπικής αναζήτησης και συζητήσεων, μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο και στις εξελίξεις που παρατηρούνται ιστορικά μέχρι και τη σημερινή εποχή.

Η διάρκεια διδασκαλίας ήταν συνολικά 14 διδακτικές ώρες (2 για την εισαγωγή ιστορικών στοιχείων και αναφορών, 6 για τους λογαρίθμους και 6 για τη λογαριθμική συνάρτηση και την επανάληψη). Στη παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων-αναφορών κινηθήκαμε στα προτεινόμενα βήματα κατά Jankvist (2009) παρουσιάζοντας την ιστορία ως «εργαλείο» για την αποσαφήνιση όρων, αλλά και ως «σκοπό» για την αποκάλυψη των κινήτρων εύρεσης της έννοιας του λογαρίθμου, έχοντας τελικά ως «στόχο» τη καλύτερη κατανόηση της έννοιας και τη παρουσίαση εφαρμογών (που γίνεται χρήση των λογαρίθμων. Τα φύλλα εργασίας (7) ήταν καθοδηγούμενης ανακάλυψης και δίνονταν προεκτάσεις τόσο με στοχευμένα ερωτήματα αλλά και με χρήση υπολογιστή γραφικών για τη σύνδεση των εννοιών με την ύλη της Γ' Λυκείου. Από τεχνολογικής απόψης κάναμε χρήση του μαθηματικού πακέτου Geogebra.

Ακολούθησαν δύο ερωτηματολόγια προς διερεύνηση των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων σε μια διπλή κατεύθυνση. Στο πρώτο θέλαμε να δούμε την απόκριση τους στην απόκτηση κάποιων γενικών γνώσεων στις ιστορικές αναφορές, αν επιτύχαμε στη διευκρίνιση σημείων που αναφέρονται στο σχολικό εγχειρίδιο, όπως και τη προσωπική τους διαδρομή σκέψης και τις πιθανές κρίσεις τους πάνω σε αυτές. Στο δεύτερο θελήσαμε να ανιχνεύσουμε το βαθμό κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που πραγματεύθηκαν, σε ποια σημεία έχουμε επιτύχει και σε ποια πρέπει να επιμεινουμε περισσότερο ή να διαφοροποιήσουμε τη προσέγγισή μας.

III. Επιλεγμένα Αποτελέσματα

Το 1ο Ερωτηματολόγιο ονομάζονταν Γνώσεων και προβληματισμού... και περιελάμβανε 11 ερωτήσεις. Στη συνέχεια παρατίθενται οι ερωτήσεις και παρουσιάζονται συνοπτικά οι απαντήσεις των μαθητών/τριών.

1) Ποιος κατά τη γνώμη σας ήταν ο βασικός λόγος που οδήγησε τους εμπνευστές των λογαρίθμων, στη δημιουργία τους; Ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

Οι μαθητές/τριες σημείωσαν την απλούστευση πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς, που φάνηκε χρήσιμη σε υπολογισμούς στην αστρονομία αλλά και σε άλλους τομείς.

2) Σε ποιον οφείλεται η ονομασία «λογάριθμος» και τι έδειχνε κατά τον ίδιο; Από τη σύνθεση ποιων Ελληνικών λέξεων παράγεται η λέξη; Ποιον αιώνα έγινε αυτό;

Στις απαντήσεις έγινε προσπάθεια σύνδεσης της λέξης με την αντιστοιχία όρων μιας αριθμητικής και μιας Γεωμετρικής προόδου. Υπήρξαν ωστόσο κάποια προβλήματα ίσως γιατί οι μαθητές δεν θυμόντουσαν τις προόδους, και δεν ήταν σε θέση να τα διατυπώσουν ακριβώς, σύμφωνα με τον ορισμό Napier. Υπήρξε σχεδόν καθολική όμως σύνδεση του ονόματος του John Napier με τον νεπέριο λογάριθμο καθώς επίσης εύκολα θυμόντουσαν και τον αιώνα επινόησης του λογαρίθμου.

3) Στο σχολικό βιβλίο της Β' Λυκείου διαβάζουμε ότι: «Οι ιδιότητες των λογαρίθμων, είναι σημαντικότερες για το λογισμό με λογαρίθμους θετικών αριθμών». Τι το σημαντικό νομίζετε ότι δείχνουν;

Οι μαθητές απάντησαν ότι οι πράξεις πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, υπολογισμού δύναμης και ρίζας, ανάγονται σε πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση αντίστοιχα και έτσι απλοστεύονται οι πράξεις με τη χρήση των λογαριθμικών πινάκων.

4) Επίσης στο βιβλίο υπογραμμίζεται η αντιστοιχία των λογαριθμικών ιδιοτήτων με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ποια κατά τη γνώμη σας είναι αυτή η αντιστοιχία; Σε ποιον εξέχοντα μαθηματικό οφείλεται ιστορικά αυτή η έμπνευση;

Εδώ τονίστηκαν ιδιαίτερα οι περιορισμοί για τους a , θ και η σύνδεση εκθετικής και λογαριθμικής λειτουργίας.

5) Από όλους τους αριθμούς, η επιλογή του αριθμού 10 για να αποτελέσει τη βάση των ονομαζόμενων 'κοινών' λογαρίθμων, ήταν κατά τη γνώμη σας τυχαία; Σε ποιον οφείλεται η χρήση λογαρίθμων με αυτή τη βάση;

Οι απαντήσεις εστίασαν στο γεγονός ότι το 10 είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος που χρησιμοποιούμε.

6) Στο σχολικό βιβλίο της Β' Λυκείου αναφέρεται ότι: «Στα μαθηματικά είναι εξαιρετικά χρήσιμοι και οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον “αριθμό e ”. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι και συμβολίζονται με $\ln x$ αντί $\log_e x$ ».

α) Γιατί νομίζετε ότι είναι σημαντικός ο αριθμός « e »; β) Να αναφέρετε ένα φαινόμενο που μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση του αριθμού e . Με τι ισούται αυτός ο αριθμός; γ) Σε ποιον οφείλεται η ονομασία του αριθμού e ; δ) Για ποιο λόγο οι φυσικοί λογάριθμοι ονομάζονται έτσι; Από τα αρχικά ποιων λέξεων προέρχεται ο συμβολισμός « \ln »

Παρά του ότι ειπώθηκαν αρκετά για τον αριθμό του Euler δεν συγκρατήθηκαν από τους μαθητές, αλλά τον συγκράτησαν ως βάση του φυσικού λογάριθμου. Επιπλέον τον συνάντησαν στη λύση προβλημάτων στα οποία επιμείναμε από άλλα επιστημονικά πεδία. Η επιλογή του παραδείγματος του ανατοκισμού στο σχολικό βιβλίο φαίνεται να είναι άκρως επιτυχημένη.

7) Από τα παραπάνω ερωτήματα είχατε σκεφθεί κάποια από μόνοι σας; Νομίζετε ότι ήταν θετικό που απαντήσαμε σε τέτοια φύσεως ερωτήματα ή σας βρήκε αδιάφορους;

Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών/τριών απάντησε ότι τέτοια ερωτήματα όχι μόνο καλό είναι να υπάρχουν αλλά και να απαντώνται, αφού προκαλούν το ενδιαφέρον τους, αποσαφηνίζουν όρους και κίνητρα και οδηγούν σε πληρέστερη και σφαιρικότερη κατανόηση των εννοιών. Αυτό οδηγεί στο αβίαστο συμπέρασμα ότι περιέργεια και ενδιαφέρον υπάρχει στους μαθητές/τριες μας αλλά συνήθως δεν προκαλούνται με την διδακτική διαδικασία που συνήθως ακολουθείται. Στο σύνολό τους τα παιδιά θεώρησαν τον συνδυασμό των διδακτικών προσεγγίσεων ως την καλύτερη επιλογή τόσο για καλούς μαθητές όσο και για λιγότερο καλούς, μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων και εφαρμογών που να δείχνουν την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο.

8) Το ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου το έχετε διαβάσει, μελετήσει ή δεν έχετε ασχοληθεί καθόλου με αυτό;

Η πλειονότητα των μαθητών/τριών θεωρεί τη διδακτική προσέγγισή μας σε συνδυασμό με το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου, αρκετά διαφωτιστική στην επίλυση αποριών γύρω από την ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων, ενώ ελάχιστοι διατύπωσαν την άποψη ότι αυτά τα ιστορικά στοιχεία είναι περιττά και ότι δεν υπάρχει λόγος να τα μαθαίνουμε ενώ διατυπώθηκε και η άποψη ότι δεν αποτελούν θέμα στις εξετάσεις!

9) Στη προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης δώσαμε δύο περιπτώσεις. Μία όπως συνήθως γίνεται στο σχολείο σας με ορισμούς, θεωρήματα και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας και μία δεύτερη με αναφορά στους βασικούς δημιουργούς της έννοιας, διευκρίνιση των κινήτρων που έδειξαν τον δρόμο για την ανακάλυψή τους, επεξήγηση όρων, εννοιών και τέλος τις εφαρμογές που βρίσκουν στον κόσμο που ζούμε, χωρίς να παραμελήσουμε τη μαθηματική λειτουργία στην έννοια λογαρίθμου και λογαριθμικής συνάρτησης, όπως και τη κλιμάκωση της δυσκολίας των ασκήσεων. Αναφέρετε κατά τη γνώμη σας γιατί προτιμάτε (αν προτιμάτε) μία από τις δύο.

Σαφώς η πλειοψηφία των παιδιών δείχνει ενδιαφέρον για την προσέγγιση αυτή κατανοώντας τα πολλαπλά οφέλη μιας γενικότερης μορφώσης και ύπαρξης επεξηγήσεων σε άλλα ερωτήματα πλιν των ερωτημάτων σχετικά με το μαθηματικό αντικείμενο, ενώ ταυτόχρονα δεν αμελούν τα ερωτήματα που σχετίζονται με τις εξετάσεις τους.

10) Κατά τη γνώμη σας θα ήταν καλό και άλλες έννοιες των Μαθηματικών να διδάσκονται με αντίστοιχη προσέγγιση διανθισμένες με ιστορικές αναφορές ή όχι; Μπορείτε να προτείνετε μια τέτοια έννοια από τη φετινή σας ύλη γενικά στα Μαθηματικά;

Η πλειοψηφία των παιδιών πρότεινε κάποια ενότητα από την ύλη των μαθηματικών της χρονιάς τους όπως την τριγωνομετρία και τις συναρτήσεις. Η αναφορά στο χρόνο και αν αυτός επαρκεί για κάτι τέτοιο είναι ένα σημείο που χρήζει προσοχής δεδομένου ότι οι μαθητές/τριες δεν έχουν τον ίδιο χρόνο απόκρισης σε όσα διδάσκονται αλλά και συνυπολογίζοντας τον όγκο της ύλης που έχουν να διαπραγματευθούν.

11) Κατά την άποψή σας τα ιστορικά σημεία-αναφορές θα ήταν πιο εύστοχο να υπάρχουν στην αρχή, στη διάρκεια όπως επιχειρήσαμε εμείς στη προσέγγισή μας ή στο τέλος της παραγράφου όπως είναι τώρα στο βιβλίο σας και για ποιο λόγο;

Οι απόψεις των μαθητών/τριών μας διαφοροποιούνται για τη θέση των ιστορικών αναφορών-σημειωμάτων στη διαπραγμάτευση της ενότητας. Ωστόσο εντύπωση προκαλούν δύο παρατηρήσεις. Πρώτον κανένας δεν ισχυρίστηκε ότι δε χρειάζονται καθόλου αφού «σπάνε τη μονοτονία» και επιπλέον δίνονται απαντήσεις σε μερικές τους απορίες, όπως πως δημιουργήθηκαν όλα αυτά και για ποιο σκοπό. Δεύτερον ότι για να μπορέσουν να τα κατανοήσουν χρειάζεται και η αρωγή του δασκάλου σε αρκετά σημεία και η προτροπή του για να ασχοληθούν με κάτι που δεν περιέχει μόνο μαθηματικά αλλά και ιστορία.

IV. Συμπεράσματα

Το συμπέρασμα και ταυτόχρονα απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι ότι μία διδασκαλία μαθηματικής έννοιας με ιστορική προοπτική είναι δυνατόν να επιτευχθεί με πολλαπλά οφέλη για εμάς τους διδάσκοντες και τους μαθητές/τριές μας.

Αν και στο σχολικό βιβλίο υπάρχει ιστορικό σημείωμα, αυτό δεν χρησιμοποιείται ούτε στον ελάχιστο βαθμό, αφενός γιατί δεν δίνεται σχετική οδηγία στο αναλυτικό πρόγραμμα και αφετέρου γιατί οι μαθητές δεν έχουν κάποια παρακίνηση από τους δασκάλους τους για να το «μελετήσουν». Άρα όπως δηλώνουν οι ίδιοι αφού δεν εξετάζεται δεν χρήζει μελέτης!

Επιπλέον οι συνάδελφοι για να το διδάξουν, πρέπει να μελετήσουν διεξοδικότερα τις έννοιες που αυτό πραγματεύεται, κάτι που τελικά συνήθως δεν γίνεται λόγω έλλειψης χρόνου, τόσο προσωπικού για τους δασκάλους, όσο και λόγω της τήρησης του χρονοδιαγράμματος για την ολοκλήρωση της διδασκείας ύλης.

Δεύτερο σημείο αναφοράς και απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα είναι το αυξημένο ενδιαφέρον των μαθητών/τριών μας όχι μόνο για το καθαρά μαθηματικό αντικείμενο αλλά και προς τη κατεύθυνση του προσωπικού προβληματισμού και αναζήτησης του

καθενός, για τα κίνητρα δημιουργίας και λύσης προβλημάτων από ανθρώπους μιας άλλης εποχής.

Η κριτική σκέψη και οι συζητήσεις είναι κάτι στο οποίο οι μαθητές κρίνουμε ότι ανταποκρίθηκαν θετικότερα κάνοντας δικούς τους νοητικούς συνδυασμούς τεχνικών απομνημόνευσης και κατανόησης (π.χ. από τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων σε υπολογιστικό περιβάλλον στη δημιουργία «εικόνας - σχήματος» στο μυαλό τους που στη συνέχεια οδηγεί σε απαντήσεις σε πιθανά ζητούμενα όπως τότε ένας λογάριθμος είναι θετικός ή αρνητικός ή τι συμβαίνει με τις τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x «μεγαλώνουν πολύ» ή «πλησιάζουν στο μηδέν»).

Επιπλέον κατανόησαν τους συμβολισμούς και τη χρήση τους στη λύση μαθηματικών ασκήσεων αλλά και προβλημάτων από τον κόσμο που μας περιβάλλει. Η αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων και η εφαρμοσιμότητα των Μαθηματικών είναι κάτι που καλό θα ήταν να ξεκινάει σε μικρότερες ηλικίες ώστε να υπάρχει μια γενικότερη γνωσιακή διαδοχή και εξέλιξη.

Τρίτο σημείο αναφοράς αποτελεί η αλλαγή της νοοτροπίας των παιδιών στο θέμα αντιμετώπισης των Μαθηματικών. Μετά τη προσέγγισή μας υπήρξε φανερά μεγαλύτερη διάθεση και προσπάθεια επίλυσης των ασκήσεων, επιμονή και υπομονή στην ανεύρεση ακόμη και κάποιων λαθών τους, καθώς και ανάπτυξη της κριτικής τους σκέψης για τον λόγο που εκτελούσαν κάποιες «κινήσεις» κατά τη λύση των ασκήσεων.

Πιθανόν σε αυτό να έπαιξε ρόλο η εστίαση μας στο γεγονός ότι κάποιοι αφιέρωσαν μεγάλο μέρος του χρόνου ζωής τους στην εκπλήρωση των στόχων τους και δεν υπολόγισαν κόπο και ίσως και έξοδα για την επίτευξη του δύσκολου στόχου τους. Οι ιστορικές αναφορές στο σημείο αυτό μπορούν να έχουν και γενικότερο παιδαγωγικό χαρακτήρα.

Το τέταρτο σημείο αναφοράς μας έχει να κάνει με το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο παρατηρήσαμε από την επεξεργασία των φύλλων εργασίας, τη θετική επίδραση των τεχνολογιών κατά τη διδασκαλία αλλά και της επανάληψης βασικών σημείων όπως η συσχέτιση εκθετικής-λογαριθμικής διαδικασίας κατά Euler. Η εξήγηση των λογαριθμικών νόμων μέσω της παρατήρησης και επαλήθευσης στον πίνακα αντιστοίχισης των ακολουθιών, είναι αποτελεσματική για τα παιδιά και στη συνέχεια η απόδειξη με την εκδοχή του Euler που είναι και η σημερινή, παρουσίασε ενδιαφέρον και για λιγότερο καλούς μαθητές.

Στα προβλήματα που ανιχνεύθηκαν, αναφέρουμε αρχικά την πιθανή έλλειψη διδακτικού χρόνου. Αν υποθέσουμε ότι η προσέγγισή μας θα γινόταν σε μαθητές/τριες με λιγότερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά (π.χ. θεωρητικής κατευθύνσεως) ο χρόνος των 14 διδακτικών ωρών μάλλον δεν θα ήταν επαρκής. Στο γνωστικό κομμάτι δεν διαθέσαμε επιπλέον χρόνο για κάλυψη πιθανών κενών από προηγούμενες τάξεις ενώ από την εμπειρία μας όμως φρονούμε, ότι σε πιο «αδύνατους» μαθησιακά μαθητές αυτό θα ήταν απαραίτητο για να αντιμετωπίσουν ασκήσεις όπως η λύση εξισώσεων και ανισώσεων.

«Πρόβλημα» για το ιστορικό κομμάτι αποδείχθηκε η πεποίθηση των παιδιών ότι αφού δεν εξετάζεται ως θέμα

στις επικείμενες εξετάσεις της τάξης τους, ποιος ο λόγος να ασχοληθούν μαζί του;

Με τη συζήτηση με ιστορικές αναφορές που ακολούθησε και την ανάλυση των γεγονότων μέσα στο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής του 16ου-17ου αιώνα αλλά και της σημερινής ανάγκης απόκτησης μιας σφαιρικότερης γνώσης και ανάπτυξης κριτικού πνεύματος και αναζήτησης, οι αρχικές αντιρρήσεις κάμφθηκαν σε μεγάλο τουλάχιστον βαθμό.

Επιγραμματικά θα κλείναμε αναφέροντας ότι με τη διδακτική προσέγγισή μας οι μαθητές συνδύασαν τις γνώσεις πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο που διδάχθηκαν, εμπλουτισμένες με ιστορικές αναφορές για τους εμπνευστές των εννοιών, για το «πώς, γιατί και πότε». Διαφωτίστηκαν συγκεκριμένα σημεία όπως η προέλευση των ονομασιών των λογαρίθμων, και απαντήθηκαν απορίες που δεν είχαν να κάνουν μόνο με το μαθηματικό γνωστικό αντικείμενο.

Οι αναφορές των ιστορικών παρεμβάσεων θεωρούμε ότι ήταν πιο εύστοχο που ήταν μοιρασμένες κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας και όχι στο τέλος, δεδομένου ότι υπήρξε μεγαλύτερη επαφή με αυτές και δυνατότητα υπενθυμίσεων, καθώς επίσης κρίθηκε θετικά η αποφυγή της «μονότονης» συνεχούς ασκησιολογίας.

Ο τρόπος προσέγγισης των αποδείξεων των ιδιοτήτων των λογαρίθμων μέσα από την αντιστοίχιση των προόδων αλλά και με τη σύγχρονη τεχνική μέσω ιδιοτήτων των δυνάμεων αντιμετωπίστηκε με ενδιαφέρον. Το όλο ιστορικό πλαίσιο δε κρίθηκε υπερβολικό και τονίστηκαν οι εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο.

Η χρήση μέσων τεχνολογίας αντιμετωπίστηκε θετικά από τους μαθητές/τριες, αφού δε γνώριζαν την χρήση τους αλλά και τις δυνατότητές τους πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Η συνεργατική και ενεργητική μάθηση με δράση σε υπολογιστές, βοήθησαν τους μαθητές/τριες να αναπτύξουν νοητικά σχήματα, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που πραγματευθήκαμε. Η συμμετοχή όλων τους, αυτόματα επέφερε και αύξηση του ενδιαφέροντος για το μάθημα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε πολύ τον Καθηγητή Ανούση Μιχαήλ Θεοδόση από το Πανεπιστήμιο Αιγαίου για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Dawn Leigh Anderson, Rebecca Berg, Ann Willis Sebrell, Donald W. Smith, (2004). *Exponentials and Logarithms*, in Victor J. Katz & Karen Dee Michalowicz (Ed.), *Historical Modules Project*, Mathematical Association of America, Funded by the National Science Foundation.
- Freudenthal, H. (1981). *Major problems of mathematics education. Educational studies in mathematics*, 12(2), 133-150.
- Jankvist, U. T. (2009). *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education*. *Educational studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Tall, D. (2008) *'The historical & individual development of mathematical thinking: ideas that are set-before and met-before'* In Plenary at 2008
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., ... & Siu, M. K. (2002). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey*. In *History in mathematics education* (pp. 201-240). Springer Netherlands.