Διπολικές Διεγέρσεις Τμηματικά Ομογενών Σκεδαστών και Εφαρμογές

Ανδρέας Καλογερόπουλος

Μαθηματικός και Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

akaloger@csd.auth.gr, std115704@ac.eap.gr

Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Επίκουρος Καθηγητής Πληροφορικής Α.Π.Θ.
και Μέλος ΣΕΠ ΣΘΕΤ ΕΑΠ

ntsitsas@csd.auth.gr

Περίληψη: **Σε αυτή την εργασία διερευνούμε ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα εν λόγω σφαιρικά κύματα, παράγονται από μαγνητικά δίπολα και προσπίπτουν σε σφαιρικό, τμηματικά ομογενή (πολυστρωματικό) σκεδαστή. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες τεχνικές Ασυμπτωτικής Ανάλυσης, προσδιορίζονται προσεγγιστικές εκφράσεις των μακρινών πεδίων στη ζώνη των χαμηλών συχνοτήτων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση αλγορίθμων αντίστροφης σκέδασης για προβλήματα διέγερσης τμηματικά ομογενών μέσων από ένα πλήθος εσωτερικών διπόλων.**

Λέξεις-Κλειδιά: Σκέδαση, Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Αντίστροφα Προβλήματα, Χαμηλές Συχνότητες

I. Εισαγωγη

Η *Θεωρία Σκέδασης* έχει αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια, λόγω της πληθώρας εφαρμογών που εξυπηρετεί στην Ιατρική Τηλεμετρία, π.χ. Κιούρτη (2013), στην ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων, π.χ. Gebauer et al (2005), στις Τηλεπικοινωνίες, στα συστήματα εντοπισμού (RADAR – SONAR), κ.α. Όμως, παρόλο που η βιβλιογραφία όσον αφορά τα επίπεδα προσπίπτοντα κύματα είναι αρκετά πλούσια, η έρευνα των σφαιρικών κυμάτων δεν είναι εξίσου αναπτυγμένη.

Σε ένα γενικό πλαίσιο, τα προβλήματα σκέδασης διακρίνονται σε ευθέα και αντίστροφα. Στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι γνωστές οι φυσικές και γεωμετρικές παράμετροι του σκεδαστή, η θέση καθώς και τα χαρακτηριστικά των πηγών και ζητούμενο είναι η εύρεση του ολικού πεδίου στις διάφορες περιοχές του χώρου. Στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι γνωστό το ολικό πεδίο και ζητούμενο είναι η εύρεση των χαρακτηριστικών του σκεδαστή ή/και ο εντοπισμός των πηγών.

II. Μεθοδολογια

Για την διερεύνηση των θεωρούμενων προβλημάτων σκέδασης, χρησιμοποιήσαμε κατάλληλο συνδυασμό των μεθόδων *Sommerfeld* και *T-Matrix*, βλ. Sommerfeld (1949) και Waterman (1965). Η μέθοδος Sommerfeld εφαρμόζεται αρχικά για την αποσύνθεση του ολικού πεδίου στο γνωστό πρωτεύον πεδίο (συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου) και στα άγνωστα δευτερεύοντα πεδία, τα οποία εκφράζονται στη βάση των σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων με συντελεστές προς προσδιορισμό. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής των φυσικών παραμέτρων του σκεδαστή και χρησιμοποιώντας μία T-Matrix μέθοδο, η εύρεση των άγνωστων συντελεστών ανάγεται στην επίλυση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος.

A. Μαθηματικό Μοντέλο

Ταυτοποιούμε το σκεδαστή με μια κλειστή σφαίρα V, ακτίνας a_1 και κέντρου $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$ που έχει σύνορο της σφαιρική επιφάνεια S_1. Η σφαίρα είναι χωρισμένη από τις σφαιρικές επιφάνειες S_j, για $j = 2, \dots, N$ με αντίστοιχες ακτίνες $a_N < a_{N-1} < \cdots < a_2 < a_1$, σε N ομογενή, διηλεκτρικά στρώματα V_j. Το εξωτερικό του σκεδαστή, $\mathbb{R}^3 \backslash V$, θα αναφέρεται ως V_0. Κάθε στρώμα χαρακτηρίζεται από κυματάριθμο k_j, ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_j και μαγνητική διαπερατότητα μ_j καθώς και από τις ακτίνες a_j, a_{j+1}. Ο πυρήνας του σκεδαστή, δηλαδή το στρώμα V_N, μπορεί να είναι τέλεια αγώγιμος ή διηλεκτρικός.

Ο σκεδαστής, διεγείρεται από Λ το πλήθος πηγές, τοποθετημένες στο εσωτερικό του. Υποθέτουμε ότι και οι Λ πηγές βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το κέντρο του σκεδαστή, στις θέσεις $\boldsymbol{r}_\lambda = (0,0,r_\lambda)$ με πόλωση στην κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{x}}$ και ότι είναι αυθαίρετα κατανεμημένες σε D από τα N στρώματα του σκεδαστή.

B. Αναπτύγματα Ηλεκτρομαγνητικών Πεδίων

Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση του τελεστή Helmholtz και τις σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις εκφράζουμε τη δυαδική συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου ως εξής

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}) = ik \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [\boldsymbol{M}^1_{e1n}(k,\boldsymbol{r}) \boldsymbol{M}^3_{e1n}(k,\boldsymbol{a}) + \\ \quad \boldsymbol{N}^1_{o1n}(k,\boldsymbol{r}) \boldsymbol{N}^3_{o1n}(k,\boldsymbol{a})], \qquad r < a \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [\boldsymbol{M}^1_{e1n}(k,\boldsymbol{a}) \boldsymbol{M}^3_{e1n}(k,\boldsymbol{r}) + \\ \quad \boldsymbol{N}^1_{o1n}(k,\boldsymbol{a}) \boldsymbol{N}^3_{o1n}(k,\boldsymbol{r})], \qquad r > a \end{cases} \tag{1}$$

Μέσω αυτής βρίσκουμε τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων πρωτευόντων και δευτερευόντων πεδίων της μεθόδου Sommerfeld. Συγκεκριμένα για το πρωτεύον πεδίο που οφείλεται σε διέγερση από το δίπολο στη θέση $\boldsymbol{r}_\lambda = (0,0,r_\lambda)$, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{E}_\lambda^{pr}(\boldsymbol{r}_\lambda;\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{i}{\widehat{h_0}(k_q r_\lambda)}\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\left[\boldsymbol{N}_{e1n}^{1}(k_q,\boldsymbol{r})\widehat{h_n}(k_q r_\lambda) - \boldsymbol{M}_{o1n}^{1}(k_q,\boldsymbol{r})\widehat{h_n}'(k_q r_\lambda)\right], & r < r_\lambda \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\left[\boldsymbol{N}_{e1n}^{3}(k_q,\boldsymbol{r})\widehat{j_n}(k_q r_\lambda) - \boldsymbol{M}_{o1n}^{3}(k_s,\boldsymbol{r})\widehat{j_n}'(k_q r_\lambda)\right], & r > r_\lambda\end{cases} \quad (2)$$

Ενώ για το δευτερεύον (σκεδασμένο) πεδίο, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{E}_\lambda^{sc}(\boldsymbol{r}_\lambda;\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{i}{\widehat{h_0}(k_q r_\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\Big[\widehat{h_n}(k_q r_\lambda)\tilde{a}_{n,j}^{\lambda}\boldsymbol{N}_{e1n}^{1}(k_j,\boldsymbol{r}) + \widehat{h_n}(k_q r_\lambda)a_{n,j}^{\lambda}\boldsymbol{N}_{e1n}^{3}(k_j,\boldsymbol{r}) - \widehat{h_n}'(k_q r_\lambda)b_{n,j}^{\lambda}\boldsymbol{M}_{o1n}^{3}(k_j,\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{M}_{o1n}^{1}\tilde{b}_{n,j}^{\lambda}(k_j,\boldsymbol{r})\widehat{h_n}'(k_q r_\lambda)\Big] \quad (3)$$

όπου $a_{n,j}^{\lambda}, \tilde{a}_{n,j}^{\lambda}, b_{n,j}^{\lambda}, \tilde{b}_{n,j}^{\lambda}$ οι προς προσδιορισμό συντελεστές. Τα αναπτύγματα (1)–(3) συγκλίνουν σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Aydin & Hizal (1986).

C. *T-Matrix Μέθοδος και Ολική Υπέρθεση*

Σε κάθε στρώμα V_d του σκεδαστή που περιέχει δίπολα, θα ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{E}^d = \sum_{d=1}^{m_d}\boldsymbol{E}_d^{pr}(\boldsymbol{r}_d;\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{d=1}^{m_d}\boldsymbol{E}_d^{sc}(\boldsymbol{r}_d;\hat{\boldsymbol{x}}) \quad (4)$$

όπου m_d είναι το πλήθος των διπόλων που βρίσκονται στο εσωτερικό του στρώματος V_d.

Στα στρώματα που δεν περιέχουν δίπολα, προφανώς θα έχουμε:

$$\boldsymbol{E}^j = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\boldsymbol{E}_\lambda^{sc}(\boldsymbol{r}_\lambda;\hat{\boldsymbol{x}}) \quad (5)$$

όπου Λ το πλήθος των πηγών που διεγείρουν το σκεδαστή. Ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες ως *τελεστές στρώματος*:

$$T_{n,d}^{1}(x_1,\dots,x_{m_d}) = \sum_{s=1}^{m_d}\frac{x_s\hat{h}_n(k_d r_s)}{\hat{h}_0(k_d r_s)} \quad (6)$$

$$T_{n,d}^{2}(x_1,\dots,x_{m_d}) = \sum_{s=1}^{m_d}\frac{x_s\hat{h}_n'(k_d r_s)}{\hat{h}_0(k_d r_s)} \quad (7)$$

$$S_{n,d}^{1}(x_1,\dots,x_{m_d}) = \sum_{s=1}^{m_d}\frac{x_s\hat{j}_n(k_d r_s)}{\hat{h}_0(k_d r_s)} \quad (8)$$

$$S_{n,d}^{2}(x_1,\dots,x_{m_d}) = \sum_{s=1}^{m_d}\frac{x_s\hat{j}_n'(k_d r_s)}{\hat{h}_0(k_d r_s)} \quad (9)$$

όπου $\hat{h}_n, \hat{h}_n', \hat{j}_n, \hat{j}_n'$ οι συναρτήσεις Riccatti – Bessel και οι παράγωγοί τους ως προς το $k_d r_s$ με k_d να είναι ο κυματάριθμος του στρώματος V_d. Με χρήση των τελεστών διέγερσης και την αποσύνθεση των πεδίων, σύμφωνα με τη μέθοδο Sommerfeld, οι *ολικές υπερθέσεις* των επιμέρους σκεδασμένων πεδίων σε κάθε στρώμα παίρνουν τη μορφή:

$$\boldsymbol{E}_j^{sec} = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}\Big[A_{n,j}\boldsymbol{N}_{e1n}^{3}(k_j,\boldsymbol{r}) + \tilde{A}_{n,j}\boldsymbol{N}_{e1n}^{1}(k_j,\boldsymbol{r}) - B_{n,j}\boldsymbol{M}_{o1n}^{3}(k_j,\boldsymbol{r}) - \tilde{B}_{n,j}\boldsymbol{M}_{o1n}^{1}(k_j,\boldsymbol{r})\Big] \quad (10)$$

όπου

$$A_{n,j} = \sum_{d=1}^{D}T_{n,d}^{1}\left(a_{n,j}^{1},\dots,a_{n,j}^{m_d}\right) \quad (11)$$

$$\tilde{A}_{n,j} = \sum_{d=1}^{D}T_{n,d}^{2}\left(\tilde{a}_{n,j}^{1},\dots,\tilde{a}_{n,j}^{m_d}\right) \quad (12)$$

$$B_{n,j} = \sum_{d=1}^{D}S_{n,d}^{1}\left(b_{n,j}^{1},\dots,b_{n,j}^{m_d}\right) \quad (13)$$

$$\tilde{B}_{n,j} = \sum_{d=1}^{D}S_{n,d}^{2}\left(\tilde{b}_{n,j}^{1},\dots,\tilde{b}_{n,j}^{m_d}\right) \quad (14)$$

Με χρήση των συνοριακών συνθηκών μετάβασης σε κάθε στρώμα του σκεδαστή, οδηγούμαστε στις σχέσεις:

$$\begin{pmatrix}A_{n,j}\\ \tilde{A}_{n,j}\end{pmatrix} = P_n^j\begin{pmatrix}A_{n,j-1}\\ \tilde{A}_{n,j-1}\end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix}B_{n,j}\\ \tilde{B}_{n,j}\end{pmatrix} = U_n^j\begin{pmatrix}B_{n,j-1}\\ B_{n,j-1}\end{pmatrix} \quad (16)$$

όπου P_n^j, U_n^j για $j = 1,2,\dots,N$, οι πίνακες μετάβασης όπως αναφέρονται στην Tsitsas (2009) για την περίπτωση διέγερσης από ένα μόνο δίπολο. Σημειώνουμε ότι για τα εξωτερικά πεδία, θα έχουμε $\tilde{A}_{n,0} = \tilde{B}_{n,0} = 0$ ενώ στον πυρήνα (μόνο για την περίπτωση διηλεκτρικού πυρήνα) θα έχουμε $A_{n,N} = B_{n,N} = 0$.

Εξάλλου, για τα στρώματα V_d που υπάρχουν δίπολα, από τις συνοριακές συνθήκες διηλεκτρικού, παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix}A_{n,d} + S_{n,d}^{1}(\boldsymbol{u})\\ \tilde{A}_{n,d}\end{pmatrix} = P_n^d\begin{pmatrix}A_{n,d-1}\\ \tilde{A}_{n,d-1}\end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix}B_{n,d} + S_{n,d}^{2}(\boldsymbol{u})\\ \tilde{B}_{n,d}\end{pmatrix} = U_n^d\begin{pmatrix}B_{n,d-1}\\ \tilde{B}_{n,d-1}\end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix}A_{n,d+1}\\ \tilde{A}_{n,d+1}\end{pmatrix} = P_n^{d+1}\begin{pmatrix}A_{n,d}\\ \tilde{A}_{n,d} + T_{n,d}^{1}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix}B_{n,d+1}\\ \tilde{B}_{n,d+1}\end{pmatrix} = U_n^{d+1}\begin{pmatrix}B_{n,d}\\ \tilde{B}_{n,d} + T_{n,d}^{2}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix} \quad (20)$$

Οι συντελεστές $S_{n,d}^{1}(\boldsymbol{u}), S_{n,d}^{2}(\boldsymbol{u}), T_{n,d}^{1}(\boldsymbol{u}), T_{n,d}^{2}(\boldsymbol{u})$ ορίζονται ως *τελεστές διέγερσης* και εκφράζουν την πρωτεύουσα διέγερση του στρώματος V_d. Η ακριβής μορφή του $\boldsymbol{u}$ εξαρτάται από το πλήθος των διπόλων που βρίσκονται τοποθετημένα στο στρώμα V_d.

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

A. Επίλυση Ευθέος Προβλήματος

Η μέθοδος T-Matrix ανάγει τον υπολογισμό των συντελεστών των σκεδασμένων πεδίων, στον υπολογισμό του συντελεστή του πεδίου στο εξωτερικό του σκεδαστή. Μέσω των τελεστών διέγερσης και των τελεστών στρώματος καταφέρνουμε να υπολογίσουμε τόσο τους συντελεστές των επιμέρους πεδίων, όσο και του ολικού πεδίου εφαρμόζοντας μόνο μία φορά τον ανωτέρω αλγόριθμο.

Συγκεκριμένα, από την εφαρμογή της μεθόδου για δύο δίπολα, παίρνουμε:

A1. Τα δίπολα βρίσκονται στο ίδιο στρώμα V_d – τέλεια αγώγιμος πυρήνας

$$\begin{aligned}A_{n,0} &= \Big[S^1_{d,n}(1,1)\cdot \Big(\widehat{h_n}'(k_{N-1}a_N)P^{11}_{(d\to N-1)} + \widehat{j_n}'(k_{N-1}a_N)P^{21}_{(d\to N-1)}\Big) - T^1_{d,n}(1,1)\cdot \Big(\widehat{h_n}'(k_{N-1}a_N)P^{12}_{(d\to N-1)} + \widehat{j_n}'(k_{N-1}a_N)P^{22}_{(d\to N-1)}\Big)\Big]\cdot \\ &\cdot\Big[\widehat{h_n}'(k_{N-1}a_N)P^{11}_{(N-1)} + \widehat{j_n}'(k_{N-1}a_N)P^{21}_{(N-1)}\Big]^{-1}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}B_{n,0} &= \Big[S^2_{d,n}(1,1)\cdot \Big(\widehat{h_n}(k_{N-1}a_N)U^{11}_{(q\to N-1)} + \widehat{j_n}(k_{N-1}a_N)U^{21}_{(q\to N-1)}\Big) - T^2_{d,n}(1,1)\cdot \Big(\widehat{h_n}(k_{N-1}a_N)U^{12}_{(q\to N-1)} + \widehat{j_n}(k_{N-1}a_N)U^{22}_{(q\to N-1)}\Big)\Big]\cdot \\ &\cdot\Big[\widehat{h_n}(k_{N-1}a_N)U^{11}_{(N-1)} + \widehat{j_n}(k_{N-1}a_N)U^{21}_{(N-1)}\Big]^{-1}\end{aligned} \tag{22}$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα εξάγεται και για την περίπτωση διηλεκτρικού πυρήνα.

A2. Τα δίπολα βρίσκονται σε διαφορετικά στρώματα V_d, V_s – διηλεκτρικός πυρήνας

$$A_{n,0} = \frac{1}{P^{11}_{(N)}}\cdot\Big(P^{11}_{(d\to N)}S^1_{d,n}(1,0) - P^{12}_{(d\to N)}T^1_{d,n}(1,0) + P^{11}_{(s\to N)}S^1_{s,n}(0,1) - P^{12}_{(s\to N)}T^1_{s,n}(0,1)\Big) \tag{23}$$

$$B_{n,0} = \frac{1}{U^{11}_{(N)}}\cdot\Big(U^{11}_{(d\to N)}S^2_{d,n}(1,0) - U^{12}_{(d\to N)}T^2_{d,n}(1,0) + U^{11}_{(s\to N)}S^2_{s,n}(0,1) - U^{12}_{(s\to N)}T^2_{s,n}(0,1)\Big) \tag{24}$$

Στα παραπάνω, ο συμβολισμός $P^{ij}_{(d\to N)}$ εκφράζει το στοιχείο της $i-$ γραμμής και $j-$ στήλης του πίνακα

$$P_{(d\to N)} = P^N_n\cdot P^{N-1}_n\cdot \ldots \cdot P^{d+1}_n$$

ενώ ο συμβολισμός $P^{ij}_{(N)}$ εκφράζει το στοιχείο της $i-$ γραμμής και $j-$ στήλης του πίνακα

$$P_{(N)} = P^N_n\cdot P^{N-1}_n\cdot \ldots \cdot P^1_n$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα εξάγεται και για την περίπτωση τέλεια αγώγιμου πυρήνα.

B. Αντίστροφα Προβλήματα

Χρησιμοποιώντας τεχνικές Ασυμπτωτικής Ανάλυσης και τους τύπους (21)-(24) για ηλεκτρικά μικρές σφαίρες, εξάγουμε τύπους για το μακρινό πεδίο και την ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης στην περίπτωση 3-στρωματικού, σφαιρικού σκεδαστή που διεγείρεται από δύο δίπολα τοποθετημένα στο εσωτερικό του, στη ζώνη χαμηλών συχνοτήτων ($k_0a_1 \ll 1$) και επιλύουμε αντίστροφα προβλήματα σκέδασης χρησιμοποιώντας τεχνικές μακρινού πεδίου. Ενδεικτικά αναφέρουμε το παρακάτω «μικτό» πρόβλημα εύρεσης γεωμετρικών χαρακτηριστικών και εντοπισμού πηγής:

Υποθέτουμε ότι ένας σφαιρικός, 3-στρωματικός σκεδαστής με διηλεκτρικό πυρήνα διεγείρεται από ένα δίπολο στο εσωτερικό του, τοποθετημένο στη θέση $\boldsymbol{r}_1 = (0,0,r_1)$ με $a_3 < r_1 < a_2$. Γνωρίζουμε την εξωτερική ακτίνα a_1 του σκεδαστή, τη θέση του κέντρου του, καθώς και τις φυσικές παραμέτρους ε_j, μ_j των στρωμάτων. Όμως, είναι άγνωστες οι «εσωτερικές» ακτίνες a_2, a_3 όπως και η απόσταση r_1. Μετρώντας τους δύο πρώτους όρους της ενεργειακής διατομής σκέδασης παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$m_1 = 108\pi a_1^6\frac{r_1^4}{\eta_2^4}\left(\mathcal{S}^2_{1,1}\right)^2 \tag{25}$$

$$m_2 = 54\pi a_1^6\frac{k_0^2}{r_1^2\eta_2^2}\cdot\left(\left(\mathcal{R}^2_{1,1}\right)^2 - 2\left(\mathcal{S}^2_{1,1}\right)^2 + \frac{1}{144}\left(\frac{5}{3}\right)^3\frac{a_1^4}{r_1^4\eta_2^4}\left(\mathcal{S}^2_{1,2}\right)^2\right) \tag{26}$$

Τοποθετούμε ένα δίπολο στο εσωτερικό του σκεδαστή, πολύ κοντά στο σύνορό του ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα βρίσκεται στο 1° στρώμα. Έπειτα, μετράμε τον πρώτο όρο της ολικής διατομής σκέδασης που πλέον, περιλαμβάνει και τις δύο πηγές και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$m_3 = m_1 + \frac{24\pi a_1^6}{r_2^4\eta_1^4}\left(\mathcal{S}^1_{2,1}\right)^2 + \frac{144\pi a_1^6}{r_1^2r_2^2\eta_1^2\eta_2^2}\mathcal{S}^2_{1,1}\mathcal{S}^1_{2,1} \tag{27}$$

Οι εξισώσεις (25) – (27) οδηγούν στο σύστημα

$$\mathcal{S}_{1,1}^{2} = \frac{\sqrt{m_1}\eta_2^2}{6\sqrt{3\pi}a_1^3 r_1^2} \tag{28}$$

$$r_1^6 m_2 + m_1 k_0^2 \eta_2^2 = 54\pi a_1^6 \frac{k_0^2}{\eta_2^2}\left(r_1^4\left(\mathcal{R}_{1,1}^2\right)^2 + \frac{1}{144}\left(\frac{5}{3}\right)^3 \frac{a_1^4}{\eta_2^4}\left(\mathcal{S}_{1,2}^2\right)^2\right) \tag{29}$$

$$m_3 - m_1 = \frac{24\pi a_1^6}{r_2^4 \eta_1^4}\left(\mathcal{S}_{2,1}^1\right)^2 + \frac{24\sqrt{\pi}a_1^3}{r_1^4 r_2^2 \eta_1^2}\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{3}}\mathcal{S}_{2,1}^1 \tag{30}$$

Μέσω του μη γραμμικού συστήματος (28)–(30), υπολογίζονται οι άγνωστες αποστάσεις a_3, a_2, r_1. Η θέση του διπόλου βρίσκεται από το γεγονός ότι $a_3 < r_1 < a_2$.

Σημειώνουμε ότι οι ποσότητες $\mathcal{S}_{1,1}^2, \mathcal{R}_{1,1}^2, \mathcal{S}_{1,2}^2, \mathcal{S}_{2,1}^1$ είναι συναρτήσεις των (γνωστών) φυσικών παραμέτρων αλλά και των (άγνωστων) ακτινών a_3, a_2 όπως και της απόστασης r_1 του διπόλου από το κέντρο του σφαιρικού σκεδαστή. Η απομόνωση των όρων των διατομών σκέδασης γίνεται σύμφωνα με τις τεχνικές της Dassios & Kamvyssas (1995).

Με αντίστοιχο τρόπο επιλύονται αντίστροφα προβλήματα εύρεσης φυσικών παραμέτρων και εύρεσης γεωμετρικών χαρακτηριστικών.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τροποποιώντας τον συνήθη T-Matrix αλγόριθμο με τον ορισμό και την χρήση των τελεστών διέγερσης και των τελεστών στρώματος, επιτυγχάνουμε την εύρεση των συντελεστών του ολικού μακρινού πεδίου, των συντελεστών των ολικών σκεδασμένων πεδίων και των συντελεστών των επιμέρους σκεδασμένων πεδίων με μία μόνο εφαρμογή του αλγορίθμου. Αυτό επιταχύνει τη διαδικασία υπολογισμού των ολικών/μακρινών πεδίων αφού απαιτείται μόλις μία εφαρμογή του αλγορίθμου για τον υπολογισμό τους. Με χρήση μεθόδων ασυμπτωτικής ανάλυσης, εξάγονται τύποι για τον υπολογισμό του ολικού μακρινού πεδίου και της ολικής διατομής σκέδασης που οφείλεται σε διέγερση από όλα τα δίπολα που διεγείρουν τον σκεδαστή, στη ζώνη χαμηλών συχνοτήτων. Με χρήση αυτών των τύπων, επιλύονται αντίστροφα προβλήματα σκέδασης για το ολικό πεδίο, χωρίς να χρειαστεί η υπόθεση ότι το ολικό πεδίο παράγεται από ένα δίπολο.

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που παράγονται από πολλές πηγές βρίσκει εφαρμογές – μεταξύ άλλων – στην οπτική διάχυση, βλ. Hollmann & Wang (2006), στην ηλεκτρομαγνητική δραστηριότητα του εγκεφάλου, βλ. Dassios, Fokas & Kariotou (2005); Δάσσιος (2013), στην επίλυση αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης μέσω τεχνικών κοντινού πεδίου, βλ. Tsitsas (2013) καθώς και στον σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροταινιακών κεραιών, βλ. Wong (1999).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Α’ επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Τσίτσα για την εμπιστοσύνη και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε, καθώς και την Β’ επιβλέπουσα κα. Φωτεινή Καριώτου που χάρη σε αυτή ανακάλυψα ξανά τη χαρά των Μαθηματικών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Χ. Αθανασιάδης (2015). *Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές, Τόμος Β'*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Γ. Δάσσιος (2013). *Ειδικά Θέματα Μαθηματικών, Τόμος Β2', Μαθηματικά Πρότυπα Ιατρικής Φυσικής*, Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Α. Κιούρτη (2013). "*Ανάπτυξη εμφυτεύσιμων κεραιών για εφαρμογές ασύρματης ιατρικής τελεμετρίας,*" Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα.

M. Abramowitz and I. Stegun (1995). *Handbook of Mathematical Functions*, Springer - Verlag.

C. Athanasiadis and N. L. Tsitsas (2007). "Electromagnetic scattering theorems for interior dipole excitation of a layered obstacle," *Mathematical Methods in Applied Sciences*, no. 30, pp. 1467-1482.

K. Aydin and A. Hizal (1986). "On the Completeness of the Spherical Wave Functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 428-440.

D. Colton and R. Kress (1995). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer - Verlag.

G. Dassios, A.S. Fokas, F. Kariotou (2005). *On the non-uniqueness of the inverse magnetoencephalography problem,* Inverse Problems, **21**, pp. L1-L5.

G. Dassios and G. Kamvyssas (1995). "Point Source Excitation in direct and inverse scattering: the soft and the hard small sphere," *IMA Journal of Applied Mathematics*, pp. 67-84.

G. Dassios and R. Kleinmann (2000). *Low Frequency Scattering*, Springer - Verlag.

J. Hollmann and L.V. Wang (2006). *Multiple-source optical diffusion approximation for a multilayer scattering medium*, Applied Optics, vol. 46, pp. 6004-6009.

B. Gebauer, M. Hanke, A. Kirsch, W. Muniz and C. Schneider (2005). "A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering," *Inverse Problems*, vol. 21, no. 6.

P. Morse and H. Feshbach (1953). *Methods of Theoretical Physics*, McGraw - Hill Book Company, Inc..

R. Potthast (2001). *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*, London: Chapman & Hall/CRC.

A. Sommerfeld (1949). *Partial Differential Equations in Physics*, New York: Academic Press.

N. L. Tsitsas (2009). "Direct and Inverse Dipole Electromagnetic Scattering by a Piecewise Homogeneous Sphere," *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 89, pp. 833-849.

N.L. Tsitsas (2013). “A Low Frequency Electromagnetic Near-Field Problem for a Spherical Scatterer”, *Journal of Computational Mathematics*, vol. 31, no. 5, pp. 439-448.

P. C. Waterman (1969). "New formulation of acoustic scattering," *Journal of Acoustic Society of America*, pp. 1417-1429.

K.L. Wong (1999). *Design of Nonplanar Microstrip Antennas and Transmission Lines*, Wiley.