Διενέξεις περί απείρου στην Ιστορία των Μαθηματικών και σήμερα

Αλέξανδρος Κασουρίδης

Μαθηματικός και Μεταπτ. Φοιτητής ΕΑΠ

alkas7691@gmail.com

Ελένη Μανωλακάκη

Επίκουρη Καθηγήτρια Φιλοσοφίας και Θεωρίας της Επιστήμης και της Τεχνολογίας ΕΚΠΑ

manolaka@phs.uoa.gr

Περίληψη – **Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με δύο από τις μεγαλύτερες έριδες στην Ιστορία των Μαθηματικών στις οποίες η κεντρική διαμάχη έχει να κάνει σχετικά με το ερώτημα: είναι το άπειρο πραγματικό ή δυνητικό; Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η εμπλοκή του άπειρου με όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών όπως η άλγεβρα, οι μαθηματικές σειρές, οι αριθμοί e, π, i, φ, η γεωμετρία και άλλοι. Κυρίως, στο πρώτο αυτό μέρος γίνεται προσπάθεια να ενημερωθεί ο ερευνητής πώς μέσα από τις σειρές, ξεκίνησε μια διαδικασία που έφερε το άπειρο πολύ κοντά στις αναζητήσεις των μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος, γίνεται μελέτη των θέσεων του Αριστοτέλη, του μεγάλου Έλληνα Σταγειρίτη φιλοσόφου που θεωρείται ο πατέρας του δυνητικού απείρου . Μέσα από το εμβληματικό του έργο «Φυσικά » καταγράφεται η πίστη του στο δυνητικό άπειρο, ως απάντηση στις περισσότερες από τις κρατούσες αντιλήψεις των υπόλοιπων φιλοσόφων της εποχής του. Κυρίως καταγράφεται η καίρια αντίθεσή του με την ελεατική φιλοσοφική σχολή με κύριο εκφραστή τον Ζήνωνα. Στο τρίτο μέρος η εργασία παραθέτει τις αντιλήψεις του Georg Cantor, του μεγάλου μαθηματικού που το εξαιρετικό έργο του γύρω από τη θεωρία συνόλων έφερε κοσμογονικές αλλαγές στην επιστήμη των μαθηματικών στο ξημέρωμα του εικοστού αιώνα. Η διαμάχη του με τον πρώην καθηγητή του Leopold Kronecker έφτασε στα άκρα, ενώ η πίστη του για το πραγματικό άπειρο έφερε πλήθη ακολούθων και των δύο πλευρών να διασταυρώνουν τα ξίφη τους μέχρι και σήμερα. Η εργασία ολοκληρώνεται με ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε μαθητές και με την προσωπική θέση του συγγραφέα του παρόντος σχετικά με το άπειρο.**

Λέξεις-Κλειδιά: Αριστοτέλης, Cantor, πραγματικό ή δυνητικό άπειρο, παράδοξα

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

A. Το άπειρο γενικά

Μια έννοια που έχει συζητηθεί πολύ, έχει αμφισβητηθεί και έχει συνδεθεί με σωρεία παραδόξων, είναι αυτή του απείρου. Για παράδειγμα στη σειρά 1,2,3,4,… φτάνει ποτέ κανείς στο άπειρο ή όχι ; Ο άνθρωπος από καταβολής κόσμου αναρωτήθηκε τί βρισκόταν πέρα από αυτό που μπορούσε να μετρήσει και να καταλάβει, έτσι: α) ο πρωτόγονος άνθρωπος βρήκε το άπειρο μετά το τρία αφού από εκεί πέρα ήταν «πολλά», άρα αμέτρητα β) ο λαϊκός άνθρωπος το αντιλαμβάνεται ως ένα είδος «αριθμού» μεγαλύτερου από όλους τους άλλους αριθμούς γ) το άπειρο του φωτογράφου ξεκινά σε απόσταση μεγαλύτερη των 30 μέτρων από το φακό της κάμεράς του, ενώ δ) για τον αστρονόμο ολόκληρο το σύμπαν μπορεί να μην είναι αρκετό για να καλύψει το άπειρο, αφού επί του παρόντος δεν είναι ακόμα γνωστό αν το σύμπαν είναι οριοθετημένο ή απεριόριστο.

B. Αριστοτέλης

Ο φιλόσοφος που αναζήτησε, μελέτησε, ήρθε σε αντιπαράθεση με το σύνολο σχεδόν των προγενέστερων από αυτόν και συνέγραψε ένα μεγάλο έργο με αιχμή τις αντιλήψεις του για το άπειρο ήταν ο Αριστοτέλης. Επικρίνονται από τον ίδιο όλες οι προϋπάρχουσες θεωρίες που πίστευαν πως το άπειρο είναι ον ή στοιχείο ή αρχή των όντων. Το άπειρο δεν μπορεί να έχει αυτοδύναμη ύπαρξη ανεξάρτητη από τα όντα στην πραγματικότητά τους. Το άπειρο αποτελεί **δυνητικά συμβεβηκός,** γνώρισμα δηλαδή κάποιων αυθύπαρκτων όντων. Το άπειρο υπάρχει κατά τον Αριστοτέλη ως ασταμάτητη πρόσθεση αριθμών, ως αέναη διαιρετότητα μεγεθών, ως διαρκής εναλλαγή γέννησης και φθοράς και ως χρονικής απειρίας.

Γ.Cantor

«Στη διάρκεια της ανθρώπινης ιστορίας το άπειρο σχεδόν παμψηφεί είναι αποδεκτό ως δυνητικό» (W. Mückenheim, κεφάλαιο 8). Η θέση αυτή φαίνεται να δεσπόζει από την εποχή του Αριστοτέλη μέχρι και τις αρχές του 21^{ου} αιώνα. Ο Carl Friedrich Gauss, όπως και ο Augustin Louis Cauchy είχαν αντιταχθεί στο πραγματικό άπειρο. Την αντίληψη αυτή πολέμησε με μεγάλο πείσμα ένας πρωτοεμφανιζόμενος μαθηματικός κοντά στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, ο Georg Cantor. Με τα μνημειώδη έργα του "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers" του 1895 και "Collected treatises of mathematical and philosophical content" που επιμελήθηκε και εξέδωσε ο Ernst Zermelo το 1932, εισήγαγε με αξιωματικό τρόπο για πρώτη φορά την έννοια του πραγματικού απείρου (σχήμα 1). Η εισαγωγή των υπερπεπερασμένων συνόλων, των πληθικών και διατακτικών αριθμών καθώς και οι τάξεις μεγέθους των απειροσυνόλων με τα άλεφ, προκάλεσαν τεκτονικές αλλαγές στη θεωρία αριθμών και τη μαθηματική επιστήμη γενικότερα.

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

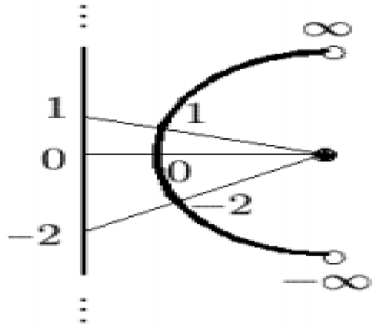
A. Για το διάστημα μεταξύ της Αρχαίας Ελληνικής Σχολής Φιλοσόφων και μέχρι το 1870

Στο διάστημα αυτό, η προσέγγιση του απείρου γίνεται κυρίως μέσα από τις άπειρες σειρές και τις προσεγγίσεις αριθμών όπως το π, το e και το φ. Γίνεται μια προσπάθεια συλλογής όλων των γνωστών τύπων της εποχής και η συνεισφορά τους στην οργάνωση της σκέψης για το άπειρο. Επιλεκτικά αναφέρουμε τον τύπο για το π του Francois Viete (1540-1603)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

που υπολογίζεται μόνο με τη χρήση του αριθμού 2(!!!), ενώ για πρώτη φορά χρησιμοποιούνται οι τρεις τελείες που υπονοούν την άπειρη συνέχιση της διαδικασίας(!!!). Αργότερα η σύγκλιση των σειρών, ο διαχωρισμός των αριθμών σε ρητούς και άρρητους και ο προβληματισμός που επέφερε το άπειρο σύμφωνα με διάφορες εφαρμογές του πάνω στη γεωμετρία έστρεψε το ενδιαφέρον των μαθηματικών γύρω από αυτό.

Β. Ο Αριστοτέλης και ο Georg Cantor



Σχήμα 1. 1-1 αντιστοίχιση σημείων ημικυκλίου στο R

Όπως προαναφέρθηκε, ο κύριος κορμός της παρούσας ΜΔΕ είναι οι διενέξεις γύρω από το άπειρο που προκάλεσαν δύο φωτεινές προσωπικότητες με το έργο τους σε σχέση με τις αντιλήψεις σύγχρονων και μεταγενέστερων μελετητών τους. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε και στην περίπτωση του Αριστοτέλη και σε αυτήν του Georg Cantor ήταν η μελέτη των πρωτοτύπων έργων τους και μέσω αυτών η αντίθεση που εξέφρασαν με τις κρατούσες αντιλήψεις (Αριστοτέλης) ή η καινοτομία που επέφεραν στα μαθηματικά που έως τότε ήταν γνωστά (Cantor). Ταυτόχρονα παρακολουθήσαμε έξω από τα πρωτότυπα έργα τους πια, τις απόψεις συμφωνούντων και κυρίως διαφωνούντων με αυτό που κόμισαν ως αλλαγή.

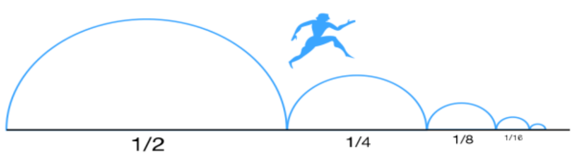
Γ. Ερωτηματολόγιο σε μαθητές Β΄ και Γ΄ Λυκείου

Η έρευνα ολοκληρώθηκε μέ ένα ερωτηματολόγιο που στηρίχθηκε σε Fischbein (2001), Dubinski et al (2005) και Makri (2015) σε μια ομάδα 60 μαθητών της Γ΄ Λυκείου, 20 της Β΄ και 10 καθηγητές Λυκείου.

ΙΙΙ. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Α. Αρχαιοελληνική σκέψη και Αριστοτέλης

Η έννοια του απείρου βρίσκεται στο κέντρο της αρχαίας ελληνικής σκέψης και τα βασικά ερωτήματα*: «Τι είναι άπειρο; Υπάρχει; Είναι ον; Είναι ουσία;»*. Ο φιλόσοφος που αναζήτησε, μελέτησε, ήρθε σε αντιπαράθεση με το σύνολο σχεδόν των προγενέστερων από αυτόν και συνέγραψε ένα μεγάλο έργο με αιχμή τις αντιλήψεις του για το άπειρο ήταν ο Αριστοτέλης. Επικρίνονται από τον ίδιο όλες οι προϋπάρχουσες θεωρίες που πίστευαν πως το άπειρο είναι ον ή στοιχείο ή αρχή των όντων. Το άπειρο δεν μπορεί να έχει αυτοδύναμη ύπαρξη ανεξάρτητη από τα όντα στην πραγματικότητά τους. Το άπειρο αποτελεί **δυνητικά συμβεβηκός,** γνώρισμα δηλαδή κάποιων αυθύπαρκτων όντων. Το άπειρο υπάρχει κατά τον Αριστοτέλη ως ασταμάτητη πρόσθεση αριθμών, ως αέναη διαιρετότητα μεγεθών, ως διαρκής εναλλαγή γέννησης και φθοράς και ως χρονικής απειρίας. Στα όντα δόθηκε το όνομα φύση, ενώ η λατινική μετάφραση natura, που στην κυριολεξία μεταφράζεται πιστά «γεννημένος» ή «γένεση» υποβαθμίζει το αρχέγονο περιεχόμενο της αντίστοιχης ελληνικής λέξης, της φύσης δηλαδή, φθείρεται δηλαδή η γνήσια κατονομαστική δύναμη της ελληνικής λέξης με την αρχέγονη έννοια. Ο Αριστοτέλης στην προσπάθειά του να γίνει το δυνατόν πιο κατανοητός χρησιμοποιεί απλές, απλούστατες λέξεις καθημερινές. Μάλιστα αρκετά συχνά φτάνει στο σημείο να γεννάει ο ίδιος μια λέξη για να εκφράσει με ακρίβεια αυτό που θέλει να πει. Όπως για παράδειγμα η λέξη **εντελέχεια = εν + τέλος + έχω**, που σημαίνει ότι κάθε ον κατά τον Αριστοτέλη φτάνει στο τέλος (σκοπό) του που ενυπάρχει στη φύση του, δηλαδή εντελέχεια είναι η ενεργεία πραγμάτωση του δυνάμει όντος. Αυτό επιτυγχάνεται όταν κάθε ον έρχεται προς την ολοκλήρωσή του προς το τέλος, την πραγμάτωση του σκοπού που ενυπάρχει στη φύση του, όπου τίποτε άλλο δεν απομένει να γίνει. Ας παρατεθεί όμως τώρα η βάση της αριστοτελικής θέσης για τη **δυνητική ύπαρξη του απείρου** που ποτέ δεν μεταμορφώνεται σε ενεργητικά πραγματωμένη ύπαρξη. Τρία διαφορετικά φαινόμενα μας οδηγούν στην άποψη πως το άπειρο μπορεί να γίνει αντιληπτό ως εσωτερική ιδιότητα μη – εξάντλησης ενός συστήματος. Η άποψη αυτή συνηγορεί οπωσδήποτε υπέρ μια δυνητικής αντίληψης για το άπειρο. Αυτά είναι: α) το ατελείωτο του χρόνου όπως το βιώνει κανείς «στην πορεία», β) η αδυναμία ολοκλήρωσης μιας προς τα πάνω αρίθμησης και γ) η δυνατότητα άπειρης διαίρεσης πεπερασμένων μεγεθών, αφού κάθε διαίρεση ενός πεπερασμένου μεγέθους μπορεί να ακολουθήσει μία νέα διαίρεση. Μία στοχευμένη, επιτηδευμένη και με επιχειρήματα χτισμένη επίθεση του Αριστοτέλη στην Ελεατική σχολή, με αποδέκτες τους Παρμενίδη και Μέλισσο: άπειρο δεν είναι αυτό που δεν έχει τίποτα απ' έξω του, αλλά αυτό κάθε φορά έχει κάτι απ' έξω του. . Στο Ζ΄ βιβλίο κεντρικότερη έριδα έναντι όλων αυτή μεταξύ Αριστοτέλη και Ζήνωνα, δηλαδή η έντονη κριτική που ασκήθηκε πάνω στην Ελεατική σχολή των φιλοσόφων που αποτελείτο από τον ιδρυτή Ξενοφάνη, τον Παρμενίδη (πολλοί πιστεύουν ότι αυτός ήταν ο ιδρυτής τους), τον Ζήνωνα και τον Μέλισσο· όλοι τους ορμώμενοι από την περιοχή της Ελέας, πόλης της Μεγάλης Ελλάδας στην κάτω Ιταλία, λίγο νοτιότερα της σημερινής πόλης της Νάπολης. Το πλέον τυπικό παράδειγμα για το αριστοτελικό συνεχές είναι η ευθεία γραμμή. Η γραμμή αποτελείται με τη σειρά της μόνο από γραμμές, που κι αυτές είναι επ' άπειρον διαιρετές. Τα άπειρα μεμονωμένα σημεία περιέχονται δυνητικά σε αυτή, όμως δεν απαρτίζουν την ευθεία γραμμή, αφού τα σημεία δεν είναι ενεργά στην πραγματικότητα, δεν υπάρχουν. Άρα η ύπαρξη αυτών των σημείων είναι μόνο εν δυνάμει και έρχονται στην πραγματικότητα μόνο αν η γραμμή κοπεί, διαιρεθεί, χάνοντας όμως έτσι τη συνοχή της, του συνεχούς. Ο Αριστοτέλης για το αδιάστατο του χρόνου, χρησιμοποιεί τον **όρο «νυν», το τώρα ως χρονική στιγμή, όχι σαν χρονικό διάστημα συνεχές με την έννοια της άπειρης διαιρετότητας.** O L.N. Sandowsky (σελ. 5), τονίζει ότι τα παράδοξα που έθεσε ο Ζήνωνας οδήγησαν στην αναγκαιότητα διάκρισης των χρονικών σημείων (των νυν) από τη χρονική διάρκεια. Τα εκάστοτε τώρα, τα νυν ως αδιάστατα, δεν αποτελούν μόνο δυνητικές καταστάσεις πραγματικότητας που θα διέκοπταν το συνεχές του χρόνου (Δ. Αναπολιτάνος, σελ. 73-74). Σε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα **βεβαιώνεται μια αδυναμία σύμπλευσης πεπερασμένων και άπειρων συνδυασμών μεγεθών**. Η κύρια αστοχία των παραδόξων του Ζήνωνα κατά Αριστοτέλη βρίσκεται στη λανθασμένη θέση της προϋπόθεσης ως δεδομένα ότι ο χρόνος αποτελείται από τα εκάστοτε νυν: ο Φιλόσοφος όμως δεν δέχεται ως αληθές κάτι τέτοιο, αντίθετα δέχεται μόνο την κίνηση στο συνεχές του χρόνου μέσα στον οποίο το εκάστοτε νυν είναι δυνητικό, όχι πραγματικότητα. Σχετικά με το παράδοξο της διχοτομίας (σχημα 2), αν ένας άνδρας κινηθεί προς έναν τοίχο θα πρέπει πρώτα να διανύσει την μισή απόσταση, κατόπιν τη μισή της υπόλοιπης απόστασης και μετά ξανά τη μισή της μισής της υπόλοιπης και ούτω καθ' εξής. Σε κάθε κίνηση προς τη μισή διαδρομή απαιτείται κάποιο αντίστοιχο χρονικό διάστημα και αφού ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων είναι άπειρος, μια και τα αντίστοιχα μισά των αποστάσεων είναι άπειρα, τότε για την ολοκλήρωση της κίνησης μέχρι τον τοίχο ο απαιτούμενος χρόνος θα είναι άπειρος. Συνεπώς ποτέ ο άνδρας δε φθάνει στον τοίχο! Το χειρότερο εδώ είναι ότι δεν μπορεί ακόμα – ακόμα να ξεκινήσει την κίνηση, αφού το πρώτο τμήμα του ταξιδιού του είναι κατά τον ίδιο τρόπο επίσης διαιρετό σε άπειρα τμήματα. Γίνεται άμεσα αντιληπτή η ένσταση της αριστοτελικής θέσης πως σε πεπερασμένο χώρο (απόσταση άνδρα – τοίχου) η κίνηση δεν μπορεί να διαρκέσει άπειρο χρόνο.



Σχήμα 2. Το παράδοξο της διχοτομίας

Β. Δέκατος ένατος αιώνας και εμφάνιση Cantor

Ακολουθεί μια περιορισμένης έκτασης παρουσίαση του έργου του Cantor, με επικρίσεις που δέχθηκε σε κάθε νέα ιδέα που εισήγαγε και ο διάλογος που επέφερε. Ορισμός:Ένας πραγματικός αριθμός καλείται **αλγεβρικός**, αν αποτελεί λύση x μιας μη-τετριμμένης πολυωνυμικής εξίσωσης $p(x) = 0$, με ακέραιους συντελεστές. $(p(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \mu\varepsilon\ \alpha_i \in \mathbb{Z})$

Συνήθως χρησιμοποιείται το $\mathbb{A}$ για να δηλώσει το σύνολο όλων των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών.

Ορισμός: Δύο σύνολα A και B είναι **ισοδύναμα (equinumerous)** αν τα στοιχεία τους μπορούν αν τεθούν σε ένα-προς-ένα αντιστοίχιση μεταξύ τους. Τότε συμβολικά $A \sim B$.

Πόρισμα: Ένα σύνολο S είναι πεπερασμένο, αν είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό τμήμα του συνόλου των φυσικών $\mathbb{N}$, δηλαδή αν $S \sim \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, όπου $\nu \geq 0$.

Ορισμός (Cantor): Ένα σύνολο S καλείται **αριθμήσιμο (denumerable),** αν το S είναι πεπερασμένο ή αν $S \sim \mathbb{N}$.

Πρόταση: Η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμη.

Πρόταση: Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση: Το σύνολο $\mathbb{A}$ των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση: Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών **δεν είναι αριθμήσιμο**.

Πόρισμα: Το σύνολο T των υπερβατικών αριθμών, με $T = \mathbb{R} - \mathbb{A}$ **δεν** είναι αριθμήσιμο.

Ο A. Bauer επιχειρηματολογεί λέγοντας: «*Η επιτυχία της θεωρίας συνόλων έχει οδηγήσει πολλούς να πιστεύουν ότι παρέχει ένα ακλόνητο θεμέλιο των μαθηματικών. Δεν είναι έτσι, απλά περιέχει μια μοναδικότητα της γλώσσας και στο στενό πλαίσιό της (η θεωρία συνόλων) είναι ένα μικρό θαύμα. Άλλωστε σκεφτείτε ότι πρακτικά όλα τα κλασσικά μαθηματικά εφευρέθηκαν πριν τη λογική και τη θεωρία συνόλων*» (A. Bauer, άρθρο)

Ο Cantor, χρησιμοποιήσε το εβραϊκό γράμμα άλεφ ($\aleph$) με δείκτες, για να ονομάσει τους διάφορους πληθικούς αριθμούς που έδωσε στα διάφορα άπειρα σύνολα, ξεκινώντας με το $\aleph_0$ για το πλήθος των φυσικών $\mathbb{N}$, δηλαδή $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Όμως αν T είναι το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών και E το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών, επειδή το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ βρίσκεται σε $1-1$ αντιστοιχία και με το σύνολο T των τετραγώνων των φυσικών και με το σύνολο E των άρτιων φυσικών ισχύει:

$card(T) = card(E) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$

Αλλά τα σύνολα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, $\mathbb{Q}$ των ρητών και $\mathbb{A}$ των αλγεβρικών αριθμών, έχουν αποδειχθεί αριθμήσιμα, δηλαδή σε $1-1$ αντιστοίχιση με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών,οπότε

$card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{A}) = card(\mathbb{N}) \quad = \aleph_0$

Όμως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο. Άρα το $\mathbb{R}$ δεν έχει την ίδια τάξη μεγέθους με το $\mathbb{N}$ και ο Cantor όρισε το γράμμα c ως τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{R}$, δηλαδή εξ' ορισμού

$c = card(\mathbb{R})$

Αμέσως – αμέσως ο Cantor οδηγήθηκε σε δύο πολύ σημαντικά ερωτήματα:

(α) Υπάρχουν άλλοι πληθικοί αριθμοί εκτός των $\aleph_0$ και c;

(β) Ειδικά, υπάρχουν άλλοι πληθικοί αριθμοί ανάμεσα στους $\aleph_0$ και c;

Η κριτική μεγάλη μέχρι εδώ: Ο R. Easterly το 2006 δημοσιεύει ένα εκπληκτικό επιχείρημα: «*Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το άπειρο υπάρχει; Μπορώ να σκεφτώ μερικούς συμπαθητικούς παράλογους πεπερασμένους αριθμούς. Υπολόγισα κάποτε πως ένας υπολογιστής με ταχύτητα* 10^{44} *πράξεων το δευτερόλεπτο, σε 13 δισεκατομμύρια χρόνια (δηλαδή περίπου την ηλικία του σύμπαντος) θα έχει εκτελέσει* 10^{60} *πράξεις. Γιατί να μην υπάρχουν κάποιοι απίστευτα τεράστιοι φυσικοί αριθμοί τόσο μεγάλοι που να χωράνε όλα όσα μπορούμε να ξέρουμε για το σύμπαν;* » (R. Easterly, sci.math)

$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Η παραπάνω σχέση αντανακλά το επόμενο παράδειγμα:
$\{0,1,\dots,n-1\}+\{n,n+1,\dots\}\sim\{0,2,4,\dots\}+\{1,3,5,\dots\}\sim\{0,1,2,\dots\}$

Σήμερα οι αντίπαλοι του Cantor θα του έλεγαν: «*Οι αριθμοί δεν είναι «εκεί έξω» περιμένοντας να μετρηθούν· δημιουργούνται από το μέτρημα. Σε αυτήν την περίπτωση το άπειρο είναι μόνο δυνητικό*» (B. Vallicella, δημοσίευση)

Πρόταση: Ισχύει $c=2^{\aleph_0}$.

Πρόταση: Ισχύει $\aleph_0<2^{\aleph_0}$ (δηλαδή $\aleph_0<c$)

Πρόταση: Αν $c=card(\mathbb{R})$ τότε $c\times c=c$ και $(c\times c)\times c=c$.

Πρόταση: Ισχύει $c<2^c$.

Πρόταση: Ισχύει $n<2^n<2^{2^n}<\cdots$ για $n=\aleph_0$.

Δηλαδή η πρόταση για τον $card(\mathbb{N})=\aleph_0$ είναι
$\aleph_0<2^{\aleph_0}<2^{2^{\aleph_0}}<\cdots$

Έχει κανείς λοιπόν από την παραπάνω σχέση, μια σκάλα αντιπροσώπευσης των άπειρων πληθικών αριθμών (cardinals). Υπάρχει όμως απειροσύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο $\aleph_0$ και το $c=2^{\aleph_0}$; Ο Cantor υπέθεσε πως όχι και η υπόθεση αυτή έμενε στην ιστορία ως **«Υπόθεση του συνεχούς» (Continuum Hypothesis ή CH)**. Αν η CH είναι αληθής, τότε ο αριθμός $c=2^{\aleph_0}$ είναι ο πρώτος πληθικός αριθμός άπειρου συνόλου που είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_0$ του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών. Ο Κ. Α. Lewis παρατηρεί ότι στη φύση δεν παρατηρείται κάτι παρόμοιο: «*Κανένα συνεχές δεν έχει ανακαλυφθεί στη φυσική – όλα φαίνεται να αλλάζουν με πεπερασμένες μονάδες που ονομάζονται κβάντα*» (K. A. Lewis, sci.math). Η απάντηση στο ερώτημα, περί του μικρότερου πληθικού αριθμού σε άπειρα σύνολα, πρότεινε ο Cantor να δοθεί επικαλούμενος αυτό που έμεινε να καλείται «**Αρχή της καλής διάταξης» (Well Ordering Principle ή WO** συντομογραφικά**)**. Ένα σύνολο S λέγεται ότι είναι καλά διατεταγμένο με μία σχέση διάταξης $<$ μεταξύ των στοιχείων του, αν κάθε μη κενό υποσύνολο του S' έχει ένα πρώτο στοιχείο. Είναι ίσως το πιο αμφιλεγόμενο αξίωμα της θεωρίας. Ο Andrej Kolmogorov μάλιστα προχωράει ακόμα: «*Αντικείμενα που η ύπαρξή τους θεμελιώνεται με το αξίωμα της επιλογής του Zermelo εμφανίζονται να είναι όχι μόνο χωρίς νόημα αλλά και μερικές φορές καταστροφικά προς την απλότητα και την αυστηρότητα κρίσιμων μαθηματικών θεωριών*» (A. N. Kolmogorov, σελ. 41-54).

Επιστρέφοντας στον Kronecker, τον παλιό δάσκαλο του Cantor, υποστήριζε ότι όχι απλώς οι εργασίες του Cantor αποτελούσαν αγυρτεία, αλλά ότι και ο ίδιος ο Cantor ήταν ένας **τσαρλατάνος**, ένας **διαφθορέας της νεολαίας**, όπου παρέσυρε τους νέους «σε έναν επικίνδυνο κόσμο μαθηματικού παραλογισμού» (E. T. Bell, 1937, σελ. 570).

Η πρώτη δημοσίευση και η απόδειξη του αποκαλούμενου **διαγώνιου επιχειρήματος** από τον ίδιο τον Cantor στην εφημερίδα της γερμανικής μαθηματικής ένωσης το 1890, την οποία ίδρυσε ο Cantor το 1890 και διετέλεσε τον πρώτο της πρόεδρο, προκάλεσε μεγάλη αίσθηση στη μαθηματική κοινότητα της εποχής διαιρώντας τους μαθηματικούς σε πολέμιους και υπέρμαχους. Εξ ονόματος των πρώτων ο Curt Welch δηλώνει σε επιστημονικό περιοδικό: «*Όταν πρωτοείδα την απόδειξη του διαγώνιου θεωρήματος του Cantor ότι ο αριθμός των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμος στο λύκειο, σκέφτηκα: τι φανταστική απόδειξη! Μου φάνηκε πολύ λογική και αμέσως τη θεώρησα γεγονός. Αργότερα ωστόσο, άρχισα να βλέπω τα πράγματα πολύ διαφορετικά. Τώρα πιστεύω ότι η απόδειξη είναι εντελώς ψεύτικη! Και το τεράστιο σώμα της δουλειάς που στηρίχτηκε πάνω της είναι κι αυτό εντελώς ψεύτικο!*» (C. Welch, sci.math).

Παραθέτουμε εδώ το διαγώνιο θεώρημα με την απόδειξή του: Υπέθεσε m και w δύο διαφορετικούς χαρακτήρες, ίσως από τα αρχικά των λέξεων man και woman (άντρας και γυναίκα), και θεώρησε το σύνολο M από στοιχεία $E=(x_1,x_2,\dots,x_\nu,\dots)$ με άπειρες συντεταγμένες $x_1,x_2,\dots,x_\nu,\dots$ η καθεμία από τις οποίες είναι m ή w. Έστω M το σύνολο όλων των στοιχείων E. Για παράδειγμα στο M ανήκουν τα στοιχεία

$E_\alpha=(m,m,m,\dots)$ με όλες τις θέσεις m

$E_\beta=(w,w,w,\dots)$ με όλες τις θέσεις w

$E_\gamma=(m,w,m,w,\dots)$ με εναλλάξ τις θέσεις από m και w.

Τότε ο Cantor υποστηρίζει ότι ένα τέτοιο μέγεθος (manifold / Mannigfaltigkeit) δεν έχει τον πληθικό αριθμό του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots,\nu,\dots\}$. Κι αυτό διότι αν $E_1,E_2,\dots,E_\nu,\dots$ μια απλή άπειρη σειρά στοιχείων του M, τότε υπάρχει πάντα ένα στοιχείο E_0 του M που δεν συμπίπτει με κανένα στοιχείο E_ν. Προς απόδειξη του ισχυρισμού ας είναι:

$E_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13},\dots,\alpha_{1\nu},\dots)$

$E_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23},\dots,\alpha_{2\nu},\dots)$

$E_3=(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33},\dots,\alpha_{3\nu},\dots)$

………………………………..

………………………………..

με τους χαρακτήρες $\alpha_{u\nu}$ να είναι όλοι m ή w. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\nu,\dots$ ορισμένη ώστε κάθε β_ν να είναι επίσης ίσο με m ή w αλλά πάντα διαφορετικό από το $\alpha_{\nu\nu}$.

Δηλαδή αν $\alpha_{\nu\nu}=m$ τότε $\beta_\nu=w$

ενώ αν $\alpha_{\nu\nu}=w$ τότε $\beta_\nu=m$.

Αν θεωρήσει κανείς τώρα το στοιχείο $E_0=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\nu,\dots)$ του M, τότε βλέπει αμέσως ότι η ισότητα $E_0=E_u$ δεν ικανοποιείται για κανέναν θετικό ακέραιο u, αφού στην αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε $\beta_\nu=\alpha_{u\nu}$ που για $\nu=u$ θα έπρεπε $\beta_\nu=\alpha_{\nu\nu}$ που αντιτίθεται στον ορισμό του β_ν. Από τα παραπάνω «προκύπτει αμέσως ότι η ολότητα των στοιχείων του M δεν μπορεί να τεθεί σε ακολουθία $E_1,E_2,\dots,E_\nu,\dots$, αλλιώς θα είχαμε το παράδοξο, ότι ένα αντικείμενο (thing / Ding) E_0 θα ήταν ταυτόχρονα στοιχείο του M, και επίσης όχι στοιχείο του M» (G. Cantor, ακριβώς με αυτά τα λόγια κλείνει τη δημοσίευση το 1890).

Ο Nico Benschop δίνει μια έξυπνη απάντηση στον Cantor όσον αφορά την επιχειρηματολογία του τελευταίου περί διαγώνιας διάταξης: «*Η διαγώνια διαδικασία του Cantor δεν μπορεί να ξεκινήσει με μια πλήρη λίστα, αφού η λέξη «διαγώνιος» εννοεί έναν τετραγωνικό πίνακα […]. Από όσα ξέρουμε μέχρι εδώ, όποιον πίνακα και να πάρουμε για να εφαρμόσουμε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, αυτό δεν θα είναι πλήρες, αφού κάθε πεπερασμένος τετραγωνικός πίνακας $\kappa-$ στοιχείων δυαδικών συμβολοσειρών έχει απαραίτητα κ αριθμούς· ούτε λιγότερους, ούτε περισσότερους· ενώ* *γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $2^{\kappa} > \kappa$ τέτοιοι αριθμοί για κάθε $\kappa > 0$.*» (N. Benschop, sci.math). Η κυρίως αντίδραση εδώ των μαθηματικών είναι ότι ο Cantor ισορροπεί πάνω στα όρια του πεπερασμένου και του απείρου και άρα ενστάσεις εγείρονται κατά πόσον κάτι τέτοιο είναι αποδεκτό ή όχι. Ο R. Osborn το θίγει εύστοχα: «*Τα επιχειρήματα του Cantor αμφισβητούνται από πολλούς όταν δηλώνει ότι θα μπορούσε να κάνει έναν νέο αριθμό από μια συλλογή άγνωστων αριθμών· αυτό είναι γελοίο. Αυτό που λέω να μου δείξετε, πού τα μαθηματικά δείχνουν, πώς ένα άπειρο δεν μπορεί να συμπεριλάβει οποιονδήποτε αριθμό που δεν υπάρχει ήδη μέσα στο σύνολο. Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor ελέγχει μόνο τους αριθμούς σε ένα πεπερασμένο κι όχι σε ένα άπειρο σύνολο όπως νομίζει*» (R. Osborn, δημοσίευση).

Το 1938 ο Kurt Gödel έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν ήταν δυνατόν να απορριφθεί με χρήση των αξιωμάτων της Zermelo – Fraenkel θεωρίας με το αξίωμα της επιλογής ZFC, δηλαδή τα αξιώματα της ZFC θεωρίας δεν οδηγούν σε αντίφαση προσθέτοντας την υπόθεση του συνεχούς (K. Gödel, 1940).

Το 1963 ο Paul Cohen έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν ήταν δυνατόν ούτε να αποδειχθεί με χρήση των αξιωμάτων της ZFC θεωρίας. Για την ακρίβεια έδειξε ότι τα αξιώματα της ZFC θεωρίας δεν οδηγούν σε αντίφαση προσθέτοντας την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς (P.J. Cohen, σελ. 1143 – 1148).

Τέλος, η θεωρία συνόλων του Cantor δημιούργησε παράδοξα που κλόνισαν ανεπανόρθωτα τα θεμέλια των μαθηματικών στη στροφή του εικοστού αιώνα και οδήγησε στη δημιουργία αντικρουόμενων ομάδων όσον αφορά τη δομή των μαθηματικών. Αυτές ήταν οι λογικιστές, οι ιντουϊσιονιστές και οι φορμαλιστές και μέχρι σήμερα δεν έχει δοθεί απάντηση σχετικά με ποια σχολή έχει υπερισχύσει στη συνείδηση αλλά και την πρακτική εφαρμογή του μαθήματος.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Α. Ερωτηματολόγιο

Διάχυτη είναι η αίσθηση της έρευνας ότι η ανεύρεση αν το άπειρο είναι δυνητικό ή πραγματικό μεταξύ των ερωτώμενων είναι πολύ δύσκολη. Κι αυτό κυρίως λόγω των αλληλοσυγκρουόμενων απαντήσεων στα προβλήματα που έθεσε το ερωτηματολόγιο.

Β. Σχετικά με το έργο των Αριστοτέλη και Cantor

1. Το βασικό στοιχείο των δύο ανδρών είναι η ξεκάθαρη άποψη πως είχαν κάτι να πουν το **πολύ ξεχωριστό**, που δεν είπε κανένας άλλος μέχρι τότε.
2. Οι αντιδράσεις των υπόλοιπων σύγχρονων τους επί αυτών που είπαν είναι δηλωτικό της σημαντικότητας του έργου τους ενώ και οι δύο μεγάλοι διατύπωναν ανοικτά τη διαφωνία τους με κάθε αμφισβητία τους.
3. Ήταν πολύπλευρες προσωπικότητες κάνοντας ταυτόχρονα με το συγγραφικό τους έργο πολλά άλλα πράγματα μαζί, παρ' όλες όμως τις κοινωνικές αλλαγές έμειναν σταθεροί στο έργο τους.

Γ. Σχετικά με το άπειρο

1. Η εργασία προσπάθησε να καταδείξει τις βασικές διαφορές μεταξύ δυνητικού και πραγματικού απείρου. Αυτό έγινε κατά σειρά προτεραιότητας (α) μελετώντας το πρωτότυπο έργο των δύο μεγάλων συγγραφέων, (β) καταγράφοντας τις αντιδράσεις των βασικών πολέμιών τους και (γ) παρατηρώντας τις θέσεις τρίτων είτε συγχρόνων τους είτε κυρίως μελετητών που εκφράζουν τις σημερινές αντιλήψεις περί του απείρου.
2. Πολλές φορές η διάκριση δεν είναι εμφανής ανάμεσα στο δυνητικό και πραγματικό άπειρο και αυτό συνάγεται (α) από τις ερευνητικές ομάδες που καταρτίζουν ερωτηματολόγια πάνω στο θέμα και κυρίως (β) από αντιλήψεις μαθηματικών που παίρνουν θέση σήμερα, αποστασιοποιημένοι από τις έριδες της εποχής που διατυπώθηκαν. Γενικά πάντως σήμερα οι απόψεις διίστανται.
3. Το άπειρο εμπλέκεται με τα παράδοξα στο μέγιστο βαθμό αφού (α) ο Αριστοτέλης επιχειρηματολογεί για το δυνητικό άπειρο για να άρει τα παράδοξα του Ζήνωνα και (β) ο Cantor με το πραγματικό άπειρο ήρθε αντιμέτωπος με παράδοξα που γέννησε η θεωρία του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Μπετσάκος, Β. (2008). *Αριστοτέλης Φυσικά Γ΄, Δ΄.* Εκδόσεις Ζήτρος.

Κάλφας, Β. (1999). *Αριστοτέλη Περί Φύσεως. Το δεύτερο βιβλίο των Φυσικών.* Αθήνα.

Muchenheim W. (2018). "*Transfinity, A Source Book*" 31 Okt. 2018.

Cantor G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin.

Cantor G. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* E. Zermelo (ed.) Olms, Hildesheim.

Bauer A. in *"Set theory and model theory"*, Math Overflow (30 Apr. 2010).

Easterly R.: *"How big is infinity?"*, sci. math. (26 Aug. 2006).

Vallicella B.: "*On potential and actual infinity*", Maverick Philosopher (4 Aug. 2010).

Lewis K.A. in *"Objections to Cantor:s theory (wikipedia article)"*, sci. math. (19 July 2005).

Kolmogorov A.N. (1929). *"Modern debates on the nature of mathematics"*, Nquchae Slovo 6.

Bell E.T. *Men of Mathematics*, Νέα Υόρκη: Simon and Schuster, 1937. [Ελλ. έκδ.: Οι μαθηματικοί τόμοι 1,2, μτφρ. Μανόλης Μαγειρόπουλος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001 (τόμος 1), 2007 (τόμος 2).]

Cantor G.: "Uber ein elementare Frage der Mannigfaltigkeitlehre", *Deutche Matimatiker Vereinigung, Bib 1*, 1830-1, σελ. 75-78.

Welch C.: *"Cantor's diagonal proof wrong?"*, sch. math. (14 Nov.2004).

Benschop N. in "*Why Cantor was wrong*", sci. math (20 Jul. 1999).

Osborn R. in *"The infinite, Part 6, Mathematics, physics and religion in the 19th century"*, by Common Consent (18 Jan. 2012).

Godel K. (1940). "The consistency of the continuum - hypothesis", *Princeton University Press,* Princeton.

Cohen P.J. (1963). "*The Independence of the continuum hypothesis*", Proc. Not. Acord. Sciences, USA 50.