

Τσολάκη Σταυρούλα
Μαθηματικός, Απόφοιτος
Μεταπτυχ. ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
tsolakistavroula@yahoo.gr ,
std091100@ac.eap.gr

Βασίλειος Παπαδόπουλος
Καθηγητής Τμ. Πολιτ. Μηχανικών ΔΠΘ
Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
papadob@civil.duth.gr

Περίληψη – Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιείται στα πλαίσια του “Μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά” Μεταπτυχιακού προγράμματος του ΕΑΠ. Το κύριο θέμα μελέτης είναι τα συνεχή και διακριτά δυναμικά συστήματα. Ως εκ τούτου στα δύο πρώτα κεφάλαια, περιγράφονται έννοιες που αναφέρονται στα δυναμικά συστήματα, τις ιδιότητές τους με βάση το αν είναι συνεχή ή δυναμικά. Επίσης, στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται υποκεφάλαια για τις διαφορικές εξισώσεις, με βάση τις οποίες περιγράφονται τα συνεχή συστήματα, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθενται υποκεφάλαια για τις εξισώσεις διαφορών στις οποίες βασίζονται τα αντίστοιχα διακριτά δυναμικά συστήματα. Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει ένα πρακτικό παράδειγμα με κώδικες που έχουν τρέξει σε matlab και mathematica, όπου στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων τους. Στο τελευταίο μέρος καταγράφονται κάποια σχόλια και συμπεράσματα με βάση την όλη εργασία.

Λέξεις Κλειδιά:

Συνεχές, διακριτό, δυναμικό σύστημα, χάος

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι περισσότερο εκπαιδευτικός και θα αναλύσει το θέμα με διεξοδικό εκπαιδευτικό τρόπο δίνοντας έμφαση στην κατανόηση και όχι σε πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα.

Η εργασία απαρτίζεται από τέσσερα κεφάλαια:

- Κεφάλαιο 1 :

Δυναμικά Συστήματα διαφορικών εξισώσεων και συνεχές ντετερμινιστικό χάος

- Κεφάλαιο 2:

Δυναμικά Συστήματα εξισώσεων διαφορών και διακριτό ντετερμινιστικό χάος

- Κεφάλαιο 3:

Προσομοιώσεις απλών δυναμικών συστημάτων διακριτού και συνεχούς χάους στο MATLAB/MATHEMATICA

- Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η επιστημονική κοινότητα μελετά το Χάος με αφορμή τα εγγενή χαρακτηριστικά του:

- Ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες
- Η στοχαστικότητα των χαοτικών σημάτων
- Το συνεχές ευρυζωνικό φάσμα ισχύος
- Η δυσκολία στη πρόβλεψη και των διαχωρισμό των σχημάτων μέσω της επεξεργασίας στο πεδίο συχνοτήτων ή χρόνου.

Παρατηρείται ότι συστήματα που παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά, περιγράφονται με ακρίβεια από μαθηματικά μοντέλα από καλά κατανοητές αρχές της φυσικής. Η κατανόηση των συγκεκριμένων μαθηματικών ιδιοτήτων που συνδέονται με την εμφάνιση της χαοτικής συμπεριφοράς έχει ως αποτέλεσμα την αφιέρωση ενός μεγάλου μέρους των εργασιών σε δυναμικά συστήματα. Ως εκ τούτου στην παρούσα εργασία αρχικά γίνεται μια επιστημονική ανάλυση στα Δυναμικά Συστήματα διαφορικών εξισώσεων, τις ιδιότητές τους και στο συνεχές ντετερμινιστικό χάος.

Ένα δυναμικό σύστημα στον τομέα των μαθηματικών είναι ένα σύστημα στο οποίο μια συνάρτηση περιγράφει την εξάρτηση της θέσης ενός σημείου από το χρόνο σε ένα γεωμετρικό χώρο, όπως για παράδειγμα τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την ταλάντωση ενός εκκρεμούς, τη ροή του νερού σε ένα σωλήνα, κλπ. Ένα δυναμικό σύστημα σε οποιαδήποτε στιγμή περιλαμβάνει μία κατάσταση που δίνεται από ένα σύνολο πραγματικών αριθμών που μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα γεωμετρικό σημείο στο κατάλληλο χώρο καταστάσεων. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα.

Η συνάρτηση που περιγράφει τους μελλοντικούς χώρους καταστάσεων που απορρέουν από τον τρέχοντα χώρο καταστάσεων, αποτελεί την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος. Σύμφωνα με τους Strogatz S.H., (2001), Katok A., and Hasselblatt B., (1995), συχνά η συνάρτηση είναι ντετερμινιστική. Δηλαδή, η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος ορίζει μονοσήμαντα την εξέλιξη του στο χώρο των καταστάσεων. Ωστόσο, ορισμένα συστήματα είναι στοχαστικά και σε αυτά τα τυχαία γεγονότα επηρεάζεται η εξέλιξη των μεταβλητών της κατάστασης.

Δυναμικό σύστημα είναι κάθε σύστημα το οποίο εξελίσσεται από κάποια αρχική κατάσταση, και η εξέλιξη αυτή περιγράφεται από σύνολο εξισώσεων. Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης περιγράφει με μαθηματικό τρόπο τα δυναμικά συστήματα:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, c)$$

όπου x είναι ένα διάνυσμα n πραγματικών συναρτήσεων ως προς τον χρόνο t . Η παρακάτω σχέση περιγράφει το διάνυσμα x :

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}, x \in R^n$$

Επίσης, ο συμβολισμός $x \in R^n$, περιγράφει το διάνυσμα, όπου R^n είναι ο επανομαζόμενος χώρος φάσεων ή καταστάσεων.

Φυσικές ποσότητες όπως θέση, ταχύτητα, χημικές συγκεντρώσεις, πληθυσμούς ειδών κλπ, συνήθως αντιπροσωπεύονται από τα διανύσματα x_i ($i=1, \dots, n$). Επίσης αναφέρονται σε φάσεις ή και σε χώρους των καταστάσεων. Η συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος αλλάζει σε περίπτωση που μεταβάλλεται η τιμή μιας παραμέτρου ελέγχου. Η σταθερά $c \equiv (c_1, \dots, c_k)$ χαρακτηρίζεται ως μια εξωγενής μεταβλητή. Οι παράμετροι c_i ($i=1, \dots, k$), ονομάζονται παράμετροι ελέγχου του δυναμικού συστήματος, οι οποίες κατά την εξέλιξη του φαινομένου ενός δυναμικού συστήματος, παραμένουν σταθερές.

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αναλύονται τα χαοτικά συστήματα και τα αντίστοιχα μέτρα τους.

Η περιορισμένη χρονικά πρόβλεψη των χαοτικών συστημάτων οφείλεται στην ευαισθησία τους στις αρχικές συνθήκες. Βασικά ένα χαοτικό σύστημα είναι ντετερμινιστικό, καθώς περιγράφεται από συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις. Επομένως, οι επόμενες τιμές είναι δυνατόν να βρεθούν, εφόσον γνωρίζουμε ακριβώς την αρχική συνθήκη. Παρόλο, που το σύστημα μπορεί να προβλεφθεί για άπειρο χρονικό διάστημα, πρακτικά προκύπτουν δύο αξεπέραστα προβλήματα.

Λόγω των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά την διαδικασία της μέτρησης, δεν γνωρίζουμε σχεδόν ποτέ μια αρχική συνθήκη τελείως, καθώς σχεδόν πάντα προκύπτουν μικρές αποκλίσεις από την πραγματική αρχική συνθήκη. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα αρχικό μικρό σφάλμα, ώστε παρόλο που οι νόμοι εξέλιξης του συστήματος μας είναι γνωστοί λόγω της εκθετικής απόκλισης των τροχιών, το σφάλμα μεγεθύνεται. Αυτό συνεπάγεται ότι μετά από κάποιες λίγες προβλεπόμενες τιμές, η προβλεπτικότητα του συστήματος χάνεται.

Ακόμη, λόγω καθαρά υπολογιστικών προβλημάτων είναι αδύνατη μια μακρόχρονη πρόβλεψη, ακόμη και σε περίπτωση που γνωρίζαμε ακριβώς την αρχική συνθήκη. Αυτό οφείλεται στο ότι ενώ οι προβλεπόμενες τιμές θα αυξάνονται, ο υπολογιστής καλείται να κάνει κάτι πρακτικά αδύνατο: υποχρεούται να εκτελεί πράξεις με αριθμούς που αποτελούνται από συνεχώς αυξανόμενα ψηφία. Έτσι, λόγω αποκοπής ψηφίων, σε κάποιο σημείο της διαδικασίας, θα υπεισέλθει ένα μικρό σφάλμα. Με βάση αυτή την ιδιαιτερότητα, το σφάλμα πάλι θα αυξάνεται εκθετικά σε σχέση με τον χρόνο. Αυτό οδηγεί τελικά στην απώλεια της πρόβλεψης.

Οι εκθέτες Lyapunov χρησιμοποιούνται με σκοπό να καθορίζουμε αν ένα δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Μια ποιοτική εικόνα της δυναμικής ενός συστήματος

μας δίνεται από τα πρόσημα των εκθετών Lyapunov. Οι πιθανοί τύποι ελκυστών και τα αντίστοιχα φάσματα τους σε ένα τρισδιάστατο χώρο φάσεων είναι τα εξής:

- Οριακό σημείο με φάσμα $(-, -, -)$
- Οριακός κύκλος με φάσμα $(0, -, -)$
- Διδιάστατος δακτύλιος με φάσμα $(0, 0, -)$
- Παράξενος ελκυστής με φάσμα $(+, 0, -)$

Η κατάσταση υπερχάους χαρακτηρίζει ένα χαοτικό σύστημα όταν αυτό έχει δύο ή περισσότερους θετικούς εκθέτες Lyapunov.

Κατόπιν αναλύονται τα Δυναμικά Συστήματα εξισώσεων διαφορών και το διακριτό ντετερμινιστικό χάος, μελετώντας πέντε εκφάνσεις του

- Τα διακριτά δυναμικά συστήματα

Οι βασικές αρχές που διέπουν τα διακριτά δυναμικά συστήματα είναι αρκετά όμοιες με αυτές των συνεχών δυναμικών συστημάτων. Ωστόσο, αξιοσημείωτο είναι ότι τα διακριτά συστήματα εμφανίζουν γενικά πιο ισχυρές δυναμικές ιδιότητες από τα αντίστοιχα συνεχή συστήματα. Αν πάρουμε για παράδειγμα ένα πολύ απλό, μονοδιάστατο διακριτό σύστημα, αυτό έχει την ικανότητα να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά. Από τη άλλη μεριά, για να εμφανίσει ένα συνεχές σύστημα χαοτική συμπεριφορά θα πρέπει να είναι τουλάχιστον τρισδιάστατο. Επίσης, η αριθμητική μελέτη των διακριτών συστημάτων είναι πολύ πιο απλή από τα αντίστοιχα συνεχή συστήματα.

Με σκοπό να κατανοηθούν βασικές αρχές, θεωρούμε την μελέτη της λογιστικής απεικόνισης, χαρακτηριστικό παράδειγμα των διακριτών δυναμικών συστημάτων. Αποτελεί ένα απλό πρωτόλειο διακριτό δυναμικό σύστημα. Είναι πλήρως ντετερμινιστικό, ενώ περιέχει μόνο μια μεταβλητή και μια παράμετρο ελέγχου. Επίσης, εμφανίζει πολλές από τις πτυχές που χαρακτηρίζουν πολύ πιο σύνθετα συστήματα, ο οποίος είναι και ο βασικός λόγος για τον οποίον η κατανόηση της χαοτικής συμπεριφοράς βασίζεται στην μελέτη της λογιστικής απεικόνισης.

$$P_x: X_n + 1 = AX_n (1 - X_n)$$

- Οι Εξισώσεις Διαφορών σε διακριτά γραμμικά δυναμικά συστήματα

Οι εξισώσεις διαφορών περιέχουν διακριτές αλλαγές καθώς και διαφορές των αγνώστων συναρτήσεων. Υπάρχουν διάφορα είδη αυτών των εξισώσεων, όπως:

Εξισώσεις διαφορών 1ης τάξης

Εξισώσεις διαφορών 2ης τάξης (ομογενείς και μη-ομογενείς).

Εξισώσεις διαφορών 3ης ή και ανώτερης τάξης (ομογενείς και μηομογενείς).

Εμφανίζονται σε μαθηματικά μοντέλα, όπου μεταβλητή παίρνει μόνο ένα διακριτό σύνολο τιμών, $F(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+r}) = 0$, $r \in \mathbb{N}$, $k=0, 1, 2, \dots$ και F δοσμένη συνάρτηση π.χ. η $y_{k+1} - 2y_k = 0$.

Λύση μιας εξίσωσης διαφορών, είναι μια ακολουθία y_k που την επαληθεύει για $k=0, 1, 2, \dots$, π.χ. η $y_k = 2^k$ είναι λύση της $y_{k+1} - 2y_k = 0$, $k=0, 1, 2, \dots$

Τάξη μιας εξίσωσης διαφορών, λέγεται η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη των y_k .

Αρχικές συνθήκες μιας εξίσωσης διαφορών τάξης r , είναι r δοσμένες τιμές της y_k σε r διαδοχικές διαφορετικές τιμές του k .

Συνοριακές συνθήκες μιας εξίσωσης διαφορών είναι δοσμένες τιμές της y_k σε μη διαδοχικές τιμές του k . Οι εξισώσεις διαφορών συναντώνται σε διάφορες εφαρμογές. Διάφορες μέθοδοι προσεγγιστικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων περιλαμβάνουν αντικατάσταση των διαφορικών εξισώσεων με εξισώσεις διαφορών (π.χ. στη μετεωρολογία).

- Το φαινόμενο Leslie
Το μοντέλο Leslie το οποίο αναπτύχθηκε γύρω στο 1940, περιγράφει την δυναμική του ποσοστού του πληθυσμού των θηλυκών ενός είδους. Για τα περισσότερα είδη, ο αριθμός των θηλυκών είναι ίσος με τον αριθμό των αρσενικών. Αυτή η παραδοχή επικρατεί και εδώ. Το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί σε ανθρώπινους πληθυσμούς, σε πληθυσμούς εντόμων καθώς και πληθυσμούς ζώων και ψαριών (Σούρλας Δ., 2015). Το μοντέλο αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός διακριτού δυναμικού συστήματος. Ζούμε σε ένα μη γραμμικό κόσμο και παίρνοντας υπόψη ότι το μοντέλο αυτό είναι γραμμικό, θα περιμέναμε τα μακροπρόθεσμα αποτελέσματα να είναι ανακριβή. Ωστόσο, αν αγνοήσουμε τις ασθένειες, τις περιβαλλοντικές επιδράσεις, την μόλυνση και τις εποχιακές επιδράσεις, το μοντέλο μπορεί να δώσει μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα

- Μη γραμμικά διακριτά δυναμικά συστήματα

Μια απλή εισαγωγή στα διακριτά δυναμικά συστήματα αποτελεί η τριγωνική απεικόνιση

$T: [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία ορίζεται από την σχέση

$$T(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

όπου $0 \leq \mu \leq 2$. Η τριγωνική απεικόνιση κατασκευάζεται από δύο ευθείες γραμμές. Αυτό κάνει την ανάλυση πολύ πιο απλή, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης T μπορεί να σχεδιαστεί ακόμα και με το χέρι. Μέσω της παρακάτω σχέσης, ορίζουμε μια τριγωνική απεικόνιση: $x_{n+1} = T(x_n)$

$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} \mu x_n, & 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ \mu(1-x_n), & \frac{1}{2} \leq x_n < 1 \end{cases}$$

όπου $x_{n+1} \in [0,1]$. Το σύστημα αυτό μπορεί να δώσει ιδιαίτερα πολύπλοκη συμπεριφορά, ακόμη και χαοτικά φαινόμενα, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου μ , παρά το γεγονός ότι η μορφή της τριγωνικής απεικόνισης είναι απλή και οι εξισώσεις που συσχετίζονται είναι

γραμμικές. Ακόμη, η απεικόνιση εμφανίζει ευαισθησία ως προς τις αρχικές συνθήκες όπως και την περιοδικότητα, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου μ .

- Το Μαλθουσιανό μοντέλο σε διακριτή μορφή

Έστω ένα είδος το οποίο μελετάται σε διαδοχικές διακριτές χρονικές περιόδους, υπό ελεγχόμενες συνθήκες εργαστηρίου. Ως P_t συμβολίζεται ο πληθυσμός του είδους σε χρόνο t . Στην περίπτωση αυτή περιγράφουμε, αντίστοιχα με το συνεχές μοντέλο, τα παρακάτω:

- Γεννήσεις ως (bP) , όπου b είναι το ποσοστό γεννήσεων
- Θάνατοι ως (dP) , όπου d είναι το ποσοστό θανάτων
- Υποθέτουμε ότι η μετανάστευση δεν συνεισφέρει στη μεταβολή του πληθυσμού.

Σε μια χρονική περίοδο (ή γενικότερα μονάδα του χρόνου), η αλλαγή του πληθυσμού περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Delta P = bP - dP = (b - d)P$$

Τότε το μοντέλο μετατρέπεται ως εξής:

$$P_{t+1} = P_t + (b - d)P_t = (1 - b - d)P_t = rP_t$$

όπου r είναι ο (διακριτός) ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, ο οποίος για να μην υπάρχει μείωση θα πρέπει να είναι $r > 1$.

Έστω ότι $P(t=0)=P_0$, είναι η αρχική κατάσταση του πληθυσμού. Αρχικά θα πρέπει να προσέξουμε ότι το χρονικό διάστημα (μονάδα χρόνου) μεταξύ των διαφορετικών τιμών, εξαρτάται από το είδος το οποίο μελετάμε.

Από μαθηματική άποψη μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μία "ακριβή" λύση: Έστω $P(t=0)=P_0$ ότι η αρχική τιμή του πληθυσμού, επομένως, η μεταβολή του πληθυσμού περιγράφεται ως εξής:

Πρώτη χρονική περίοδος: $P_1 = rP_0$

Δεύτερη χρονική περίοδος: $P_2 = rP_1 = r^2P_0$

N-οστή χρονική περίοδος: $P_n = rnP_0$.

Γίνεται αντιληπτό ότι μόνο με τις σταθερές λ , P_0 , ο πληθυσμός μπορεί να προβλεφθεί σε κάθε χρονική στιγμή.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα: έστω οργανισμός με πολύ συγκεκριμένο κύκλο ζωής στον οποίο κάθε θηλυκό γεννάει 100 αυγά. Εν συνεχεία, όλοι οι ενήλικες πεθαίνουν, ενώ από τα αυγά ένα ποσοστό περί το 10% γίνεται ενήλικα θηλυκά. Όσον αφορά τα υπόλοιπα, πεθαίνουν ή γίνονται αρσενικά. Για να βρούμε τη μεταβολή του πληθυσμού, θα πρέπει να θεωρήσουμε το διακριτό μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω. Οι παράμετροι του μοντέλου αυτού είναι οι παρακάτω:

$d=1$, με δεδομένο ότι σε μια χρονική περίοδο πεθαίνουν όλοι οι ενήλικες, και $b=10$, με δεδομένο ότι σε μια χρονική περίοδο κάθε θηλυκό γεννάει 100 αυγά εκ των οποίων το 10% είναι θηλυκά.

Σε τελική φάση, το μοντέλο που προκύπτει για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι:

$$P_{t+1} = (1 + 10 - 1)P_t = 10P_t$$

Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε ότι το παραπάνω μοντέλο είναι γραμμικό και προβλέπει συνεχή αύξηση του πληθυσμού. Επομένως μοιάζει πάρα πολύ με το συνεχές Μαλθουσιανό μοντέλο. Ο λόγος είναι ότι παρουσιάζει παρόμοια με την εκθετική μεταβολή. Επίσης ο παράγοντας ότι τόσο οι γεννήσεις όσο και οι θάνατοι είναι ανεξάρτητοι του μεγέθους του πληθυσμού, αποτελεί βασική υπόθεση στο μοντέλο. Λόγω του ότι ο πληθυσμός δεν μπορεί να αυξάνει για πάντα, αυτό το φαινόμενο αποτελεί τροχοπέδη, όπως και στα συνεχή μοντέλα.

$$P_{t+1} = P_{t+1} + (b - d)P_t = (1 - b - d)P_t = rP_t$$

$$P_{t+1} = (1 + 10 - 1)P_t = 10P_t$$

Τέλος παρουσιάζονται προσομοιώσεις απλών δυναμικών συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου στο MATHEMATICA. Τα υποδείγματα, που αναλύονται είναι τα ακόλουθα :

A) μοντέλα ανάπτυξης πληθυσμού (Θεωρία-Πίνακας Leslie): διακριτό δυναμικό σύστημα

B) Ο κύκλος ορίου(limit cycle) για τον ταλαντωτή Fitzhugh–Nagumo: συνεχές δυναμικό σύστημα.

Γ) Μη-αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο- εξίσωση Duffing: συνεχές δυναμικό σύστημα

Δ) Ο χαοτικός ελκυστής Ikeda: συνεχές δυναμικό σύστημα Επισημαίνουμε

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσα και από τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να δούμε μια επαλήθευση ορισμένων συμπερασμάτων τα οποία έχουν διατυπωθεί θεωρητικά, όπως από τους (Krivine et al., 2007). Έτσι, φαίνεται ότι στα διακριτά δυναμικά συστήματα, υπάρχει μια ισχυρότερη τάση και λιγότερες προϋποθέσεις για εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς. Συγκεκριμένα, διακριτά συστήματα που είναι μονοδιάστατα μπορούν να εμφανίσουν χαοτική συμπεριφορά, ενώ τα αντίστοιχα συνεχή αποκλείουν ένα τέτοιο ενδεχόμενο. Συνήθως η χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται στα συνεχή συστήματα σε συστήματα τριών διαστάσεων ή παραπάνω, κάτι που φαίνεται και από τα παραδείγματα συνεχών δυναμικών συστημάτων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι, για παράδειγμα, εάν είχαμε την εξίσωση που μελετήθηκε στα πλαίσια της θεωρίας του Leslie ως συνεχές σύστημα, θα βλέπαμε ότι η επίλυσή της είναι απλή, τείνει σε ορισμένο αριθμό, όταν το n τείνει στο άπειρο και ταυτόχρονα δεν παρουσιάζει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αντιθέτως, στην περίπτωση του διακριτού συστήματος, εάν ληφθούν διαδοχικές τιμές, κατά κανόνα παρατηρούνται χαοτικές συμπεριφορές στην εξέλιξη του επιλεγμένου τμήματος του πληθυσμού. (Yokoyama, 1997) Θα

μπορούσαμε να ισχυριστούμε, συμπερασματικά, ότι η μετάβαση από τα διακριτά συστήματα στα συνεχή είναι επιθυμητή, εφόσον οδηγεί σε απλούστερη και περισσότερο προβλέψιμη διερμηνεία τους, αν και μια τέτοια μετατροπή φαίνεται ότι δεν είναι πάντοτε εφικτή.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με βάση τόσο την θεωρία περί συνεχούς και διακριτού χρόνου (και τα αντίστοιχα είδη εξισώσεων που τα εκφράζουν), όσο και των αλγορίθμων που έτρεξαν σε προγραμματιστικό περιβάλλον matlab και mathematica, προκύπτει καταρχάς σύγκλιση μεταξύ θεωρίας και αποτελεσμάτων. Το δεδομένο αυτό είναι πολύ βασικό καθώς τα πεδία των δυναμικών συστημάτων καθώς και του διακριτού και συνεχούς χρόνου, συχνά χαρακτηρίζονται από αντιπαράθεσεις μεταξύ των διάφορων επιστημών με βάση τα αποτελέσματα στις διάφορες εφαρμογές.

Δυναμικά είναι τα συστήματα που εξελίσσεται από κάποια αρχική κατάσταση. Αυτή η εξέλιξη περιγράφεται μαθηματικά από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Τα δυναμικά συστήματα περιγράφουν την εξάρτηση της θέσης ενός σημείου από το χρόνο σε ένα γεωμετρικό χώρο. Σε ένα δυναμικό σύστημα, σπουδαίο ρόλο παίζει το φαινόμενο της γεωμετρικής πολλαπλότητας. Με τον όρο αυτό, εννοείται ότι σε οποιαδήποτε στιγμή, το σύστημα περιλαμβάνει μία κατάσταση που δίνεται από ένα σύνολο πραγματικών αριθμών που μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα γεωμετρικό σημείο στο κατάλληλο χώρο καταστάσεων.

Συνήθως, η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται από την ντετερμινιστική συνάρτηση που περιγράφει τους μελλοντικούς χώρους καταστάσεων που απορρέουν από τον τρέχοντα χώρο καταστάσεων. Στην περίπτωση των στοχαστικών συστημάτων, χαρακτηριστικό είναι ότι επηρεάζεται η εξέλιξη των μεταβλητών της κατάστασης.

Τα διακριτά δυναμικά συστήματα, βασίζονται (μαθηματικά) κατά κύριο λόγο σε εξισώσεις διαφορών πρώτης, δεύτερης, τρίτης ή και μεγαλύτερης τάξης.

Σαν ένα πρώτο σχόλιο για τα διακριτά δυναμικά συστήματα είναι ότι διέπονται από παρόμοιες βασικές αρχές με αυτές των συνεχών δυναμικών συστημάτων. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι τα διακριτά συστήματα εμφανίζουν γενικά πιο ισχυρές δυναμικές ιδιότητες από τα αντίστοιχα συνεχή συστήματα. Για να εμφανίσει ένα συνεχές σύστημα χαοτική συμπεριφορά θα πρέπει να είναι τουλάχιστον τριδιάστατο, ενώ, για παράδειγμα ένα απλό, μονοδιάστατο, διακριτό σύστημα, έχει την ικανότητα να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά. Μια άλλη σημαντική διαφορά από την προγραμματιστική και υπολογιστική σκοπιά, είναι ότι η αριθμητική μελέτη των διακριτών συστημάτων είναι πολύ πιο απλή από αυτή των αντίστοιχων συνεχών συστημάτων.

Τέλος, ο συνδυασμός των παραδειγμάτων που αναφέρθηκαν στα δύο πρώτα κεφάλαια, μαζί με τα αποτελέσματα των τρεξιμάτων των αλγορίθμων, αποτελούν συνέχεια της έως τώρα ερευνητικής δουλειάς που γίνεται σε παγκόσμιο επίπεδο, στον τομέα των μαθηματικών και όχι μόνο. Θα μπορούσε να αποτελέσει έναυσμα για ερευνητική εργασία από μια πιο διαφορετική επιστημονική σκοπιά.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παπαδόπουλο Βασίλειο, αρχικά για το ενδιαφέρον θέμα που μου πρότεινε και μου εμπιστεύτηκε, αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που στη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να

ευχαριστήσω τους γονείς μου, Χαράλαμπο και Ευθυμία, για την ανεκτίμητη βοήθεια και τη συμπαράσταση τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Elaydi S.N., (), Discrete Chaos, Second Edition: With Applications in Science and Engineering, pp.

Katok A., and Hasselblatt B., (1995), Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge.

Lynch, Stephen. Dynamical Systems With Applications Using Mathematica. 1st ed. Boston, Mass.: Birkhäuser, 2007. Print.

Strogatz S.H., (2001), Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry, Perseus publishing.

Βογιατζής Γ., και Μελετιδίου Ε., (2015), "Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα", pp. 229-265.

Παύλος Γ., Ντετερμινιστικά Συστήματα Στοιχεία Χaosτικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, pp. 144.

Σούρλας Δ., (2015), Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple, pp. 307-364"5.3 Διακριτά Πληθυσμιακά Μοντέλα Ενός Είδους· Chapter 5 Μαθηματική Βιολογία – Πληθυσμιακά Μοντέλα Ενός Είδους · Μαθηματική Μοντελοποίηση". Repfiles.kallipos.gr. N.p., 2017. Web. 4 Apr. 2017.

"Dynamical System". En.wikipedia.org. N.p., 2017. Web. 4 Apr. 2017.

"Ndsolve—Wolfram Language Documentation". Reference.wolfram.com. N.p., 2017. Web. 4 Apr. 2017.

Astrologic. 2010. NTETEPMINISMOS VS XAOS. [ONLINE] Available at: <http://astroblogic.blogspot.gr/>. [Accessed 4 April 2017].

Kevin Yokoyama. 1997. Population Modelling Using the Leslie Matrix, Part 2. [ONLINE] Available at: <http://www8.cs.umu.se/kurser/TDBA44/HT00/leslie2.pdf>. [Accessed 4 April 2017].

KRIVINE, HUBERT, ANNICK LESNE, and JACQUES TREINER. "Discrete-Time And Continuous-Time Modelling: Some Bridges And Gaps". Mathematical Structures in Computer Science 17.02 (2007): 261. Web.

National Science Foundation. "NSF 01-20 - Ikeda Attractor". Nsf.gov. N.p., 2017. Web. 4 Apr. 2017.

Ugarcovici, Ilie, and Howard Weistt. "CHAOTIC DYNAMICS OF A NONLINEAR DENSITY DEPENDENT POPULATION MODEL". N.p., 2004. Web. 4 Apr. 2017.