Fractal: Θεωρητική Προσέγγιση – Κατασκευή – Παιδαγωγική Αξία

Μιχάλης Βιτσαξής

Μαθηματικός δ/θμιας εκπαίδευσης και Μεταπτυχιακός Φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

mikevitsaxis@gmail.com, std112779@ac.eap.gr

Μιχάλης Ανούσης

Καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών και Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ ΕΑΠ

mano@aegean.gr

Περίληψη **– Σκοπός της εργασίας είναι η παρουσίαση των fractals από την πλευρά της ανάλυσης, η κατασκευή τους με μαθηματικά και αλγοριθμικά εργαλεία και στο τέλος η διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης για την παιδαγωγική αξιοποίηση της χρήσης τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.**

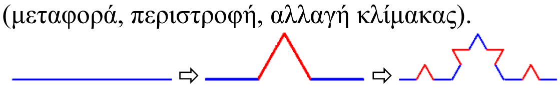
Λέξεις-Κλειδιά: Fractal, Αυτοομοιότητα, Διάσταση, ΣΕΣ, L-συστήματα

I. Εισαγωγη

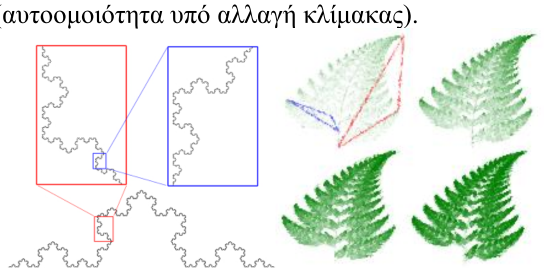
Η λέξη fractal προέρχεται από το λατινικό επίθετο fractus, του οποίου το αντίστοιχο ρήμα είναι η λέξη frangere (σπάζω δημιουργώντας ακανόνιστα κομμάτια). Μια πιθανή μετάφραση της λέξης fractal θα ήταν θραύσμα, αλλά, επειδή δεν έχει επικρατήσει στην ελληνική ορολογία, θα περιοριστούμε στην αγγλική επινόησή της (Αρτεμιάδης, 1995).

A. Οι βασικές ιδιότητες ενός fractal

- Κατασκευάζεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, όπου σε κάθε βήμα επαναλαμβάνει τους ίδιους μαθηματικούς μετασχηματισμούς (μεταφορά, περιστροφή, αλλαγή κλίμακας).



- Έχει δομή μέσα στη δομή (δηλαδή νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθυνσης).
- Τα επιμέρους τμήματά του είναι παρόμοια με άλλα τμήματα του συνόλου σε διαφορετική κλίμακα (αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας).

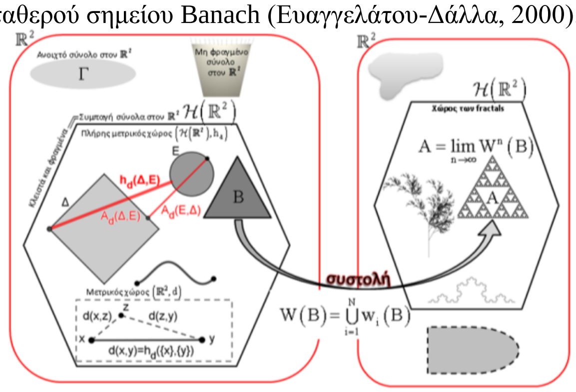


- Η αυτοομοιότητά του δεν είναι απαραίτητα ακριβής και μπορεί να περιγράφεται από μια άπειρη ακολουθία κλιμάκων, ενώ η αυτοομοιότητά του μπορεί να είναι και στατιστική ιδιότητα του συνόλου (Μπούντης, 2004).

B. Ο χώρος που «ζουν» τα fractal

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζονται τα σύνολα fractal και οι fractal συναρτήσεις είναι οι συνήθεις Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^m$ με $m=1,2,3$.

Στο μετρικό χώρο $\left(\mathbb{R}^m, d_2\right)$ ορίζουμε $\mathcal{H}=\mathcal{H}\left(\mathbb{R}^m\right)$, το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του χώρου $\mathbb{R}^m$, που αποκτά δομή πλήρους μετρικού χώρου με τη μετρική του Hausdorff και χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις συστολής κατασκευάζουμε τα fractals, ως τα σταθερά σημεία που προκύπτουν από το Θεώρημα του σταθερού σημείου Banach (Ευαγγελάτου-Δάλλα, 2000).

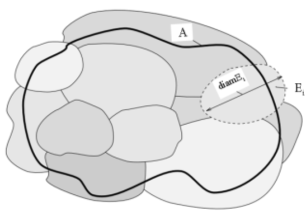


Σχήμα 1 «Εργοστάσιο κατασκευής» των fractals

C. Η διάσταση των fractals

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^m$ και $s\geq 0$. Για κάθε $\varepsilon>0$ θεωρούμε τον αριθμό: $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathrm{diam}E_i\right)^s\right\}$, όπου $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ και $0<\mathrm{diam}E_i\leq\varepsilon,\ \forall i\in\mathbb{N}^*$. Ορίζουμε ως **εξωτερικό μέτρο Hausdorff του A** (Leifsson, 2006) το εξής:

$$\mathcal{H}^s(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^s_\varepsilon(A)=\sup\left\{\mathcal{H}^s_\varepsilon(A),\forall\varepsilon>0\right\}$$



Σχήμα 2 Κάλυψη συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^m$ από φραγμένα σύνολα E_i άνισου μεγέθους

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός $s_0 \in [0, +\infty]$ ώστε $\mathcal{H}^s(A) = 0$, αν $s > s_0$ και $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, αν $0 \le s < s_0$. Τον αριθμό αυτό τον καλούμε **διάσταση Hausdorff του συνόλου A** και ισχύει $\dim_H A = s_0$.

Ο αριθμητικός υπολογισμός της διάστασης Hausdorff ενός συνόλου με βάση τον ορισμό είναι αρκετά δύσκολος, λόγω του infimum το οποίο πρέπει να υπολογιστεί πάνω σε όλες τις καλύψεις του συνόλου. Αν όμως χρησιμοποιηθεί μία κάλυψη, η οποία αποτελείται από σύνολα σταθερής διαμέτρου, τότε προκύπτει ένα άνω φράγμα της διάστασης Hausdorff, το οποίο αναφέρεται ως **διάσταση box** (ή **διάσταση Minkowski**) του συνόλου.

Η λογική προσδιορισμού της διάστασης αυτής μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά σχήματα του ευκλείδειου χώρου και παρατηρώντας τη δύναμη που εμφανίζεται στο κλάσμα $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Πιο συγκεκριμένα:

ΠΙΝΑΚΑΣ I
ΚΑΛΥΨΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΚΥΒΟΥΣ ΠΛΕΥΡΑΣ Ε

Σχήμα	**Για να καλύψουμε το σχήμα χρειαζόμαστε τουλάχιστον κύβους πλευράς ε**
 Τμήμα μήκους α	$N(A,\varepsilon) = \frac{\alpha}{\varepsilon} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^1$
 Τετράγωνο πλευράς α	$N(A,\varepsilon) = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2 = \alpha^2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$
 Κύβος ακμής α	$N(A,\varepsilon) = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^3 = \alpha^3 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$
Τυχαίο σχήμα	$N(A,\varepsilon) \approx c \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s$ όπου η σταθερά c εξαρτάται από το σχήμα και το σύμβολο ≈ χρησιμοποιήθηκε με την έννοια ότι $f(\varepsilon) \approx g(\varepsilon)$ όταν $\lim_{\varepsilon \to 0}(f(\varepsilon) - g(\varepsilon)) = 0$

Οπότε $\log N(A,\varepsilon) \approx \log\left[c \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s\right] \Rightarrow$

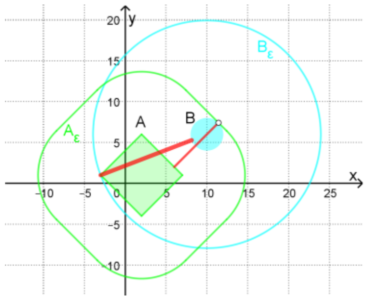
$$\log N(A,\varepsilon) \approx \log c - s \log \varepsilon \Rightarrow s = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N(A,\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

Έστω A ένα μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $N(A,\varepsilon)$ ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου το πολύ ε που καλύπτει το A. Ορίζουμε **διάσταση box counting** του A τον αριθμό $\dim_B A = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N(A,\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$.

D. *Η μετρική του Hausdorff*

Ο Hausdorff για να μετρήσει την απόσταση μεταξύ δύο μη κενών, κλειστών και φραγμένων συνόλων A και B χρησιμοποίησε τα σύνολα A_ε και B_ε αντίστοιχα και όρισε την απόσταση των A, B ως το μικρότερο ε, για το οποίο το A_ε περιέχει το B και το B_ε περιέχει το A.

$$h_d(A,B) = \inf\{\varepsilon / A \subset B_\varepsilon \text{ και } B \subset A_\varepsilon\}, \text{ όπου } \varepsilon > 0.$$



Σχήμα 3 Η απόσταση Hausdorff, με τη βοήθεια της διαστολής των συνόλων

Σε έναν πλήρη μετρικό χώρο (X,d) η συνάρτηση του Hausdorff αποδείχθηκε ότι είναι **μετρική** στο χώρο $\mathcal{H}(X)$ και ότι ο χώρος $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^m), h)$ είναι **πλήρης μετρικός χώρος**. Έτσι αν $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του συμπαγούς συνόλου $X \subseteq \mathbb{R}^m$, τότε ο $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος (Aliprantis & Border, 2005; Ευαγγελάτου-Δάλλα, 2000).

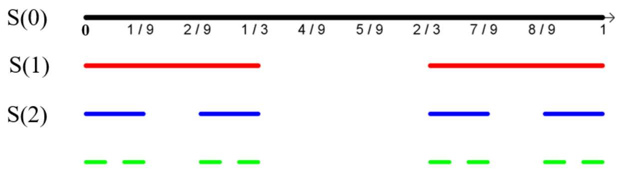
Σύμφωνα με τον Hausdorff ο χώρος όλων των συμπαγών υποσυνόλων του X, εξοπλισμένο με την απόσταση Hausdorff, είναι ένας άλλος πλήρης μετρικός χώρος. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος όλων των συμπαγών υποσυνόλων του X είναι ένα κατάλληλο περιβάλλον για τη σχεδίαση των fractals, όπου η δημιουργία τους θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων συστολής.

E. *Κατασκευή fractals*

Τα περισσότερα fractals έχουν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας και η μοντελοποίησή τους απαιτεί αλγορίθμους. Οι αλγόριθμοι αυτοί αναπτύσσονται με τη βοήθεια πεπερασμένων μετασχηματισμών (αλλαγή κλίμακας, μεταφορά και περιστροφή) ή κανόνων, των οποίων η επανάληψη οδηγεί στην κατασκευή των fractals αντικειμένων. Χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές επαναληπτικές διαδικασίες, τα ΣΕΣ και τα L-συστήματα, θα κατασκευάσουμε τα fractals και θα αποτυπώσουμε τις απαιτητικές τους λεπτομέρειες εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Ένα Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ) αποτελείται από έναν πλήρη μετρικό χώρο (X,d) και από έναν πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων συστολής $\{w_n : n = 1, 2, ..., N\}$ που συμβολίζονται $\{X; w_{1-N}\}$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο ΣΕΣ κατασκευάζουμε fractal σύνολα στους Ευκλείδειους χώρους.

Αν σε μία επαναληπτική διαδικασία, κάθε τμήμα αντικαθίσταται με δύο όμοια τμήματα, που έχουν υποστεί σμίκρυνση $33,\overline{3}\%$ (συντελεστής κλίμακας $r = \frac{1}{3}$) και το δεύτερο μετακινηθεί κατάλληλα ώστε να σχηματιστεί η παρακάτω διάταξη



Σχήμα 4 Τριαδικό σύνολο Cantor

τότε χρησιμοποιώντας $3^1 - 1 = 2$ συστολές μπορούμε να πετύχουμε τη δημιουργία και μεταφορά των δύο αντιγράφων του αρχικού συνόλου στον $(\mathbb{R}, d_2)$.

$w_1(x) = \frac{1}{3}x$ …σμίκρυνση κατά $\frac{1}{3}$

$w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ … σμίκρυνση κατά $\frac{1}{3}$ και μεταφορά κατά $\frac{2}{3}$

Συνεπώς, για $B = [0,1]$ έχουμε:

$$w_1(B) = [w_1(0), w_1(1)] = \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$w_2(B) = [w_2(0), w_2(1)] = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \text{ οπότε}$$

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$W^2(B) = (W \circ W)(B) = W(W(B)) \Rightarrow$$

$$W^2(B) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \quad \text{κτλ.}$$

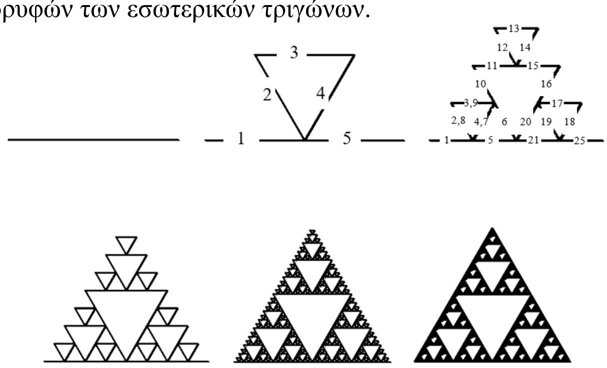
Τελικά, για $B = [0,1]$ η συνάρτηση $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R})$ με $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B),\ B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση συστολής με ελκυστή το σύνολο του Cantor (Barnsley, 1993).

Ένα L-σύστημα αποτελείται από έναν κανόνα (αξίωμα) και κανόνες επανεγγραφής (κανόνες παραγωγής).

ΠΙΝΑΚΑΣ III
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΤΟΛΕΣ L-ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Εντολή	Εκτέλεση
F	Προχωρήστε ένα βήμα και σχεδιάστε μια γραμμή
f	Προχωρήστε ένα βήμα χωρίς να σχεδιάσετε μια γραμμή
+	Στρίψτε αριστερά με σταθερή γωνία
-	Γυρίστε δεξιά με σταθερή γωνία
|	Κάντε στροφή 180 μοιρών
(	Να θυμάστε την τρέχουσα θέση και κατεύθυνση, αποθηκεύοντάς την σε μια στοίβα
)	Επαναφέρετε τη θέση και κατεύθυνση από την κορυφή της στοίβας και ανοίξτε αυτήν την καταχώρηση από τη στοίβα (εκτός εάν η στοίβα είναι κενή)

Αν ξεκινήσουμε με το αξίωμα F ($\text{Axiom}: F$) και χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα $\begin{cases} F \to F + F - F - F + F \\ \text{Angle}: 120 \end{cases}$, τότε αρχίζοντας από μία πλευρά δημιουργούνται εσωτερικά τρίγωνα και οι άλλες δύο πλευρές του fractal τριγώνου σχηματίζονται από τις οριακές θέσεις των κορυφών των εσωτερικών τριγώνων.



Σχήμα 5 Ακολουθία σχηματισμού τριγώνου Sierpinski (οι αριθμοί δείχνουν τη σειρά κατασκευής)

II. Μεθοδολογια

Τα fractals ως αντικείμενα των μαθηματικών και ως επαναληπτικές διαδικασίες αντικειμένων της φύσης αποτελούν έναν καλό συνδετικό κρίκο μεταξύ του πραγματικού και μαθηματικού κόσμου. Αυτός ο κρίκος μπορεί να συσχετίσει αφηρημένες μαθηματικές ιδέες με φυσικές καταστάσεις και έτσι να διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Τα fractals είναι μια έννοια που δεν περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του λυκείου, αλλά εμπεριέχει πολλά στοιχεία από αυτό. Η προσέγγισή τους έγινε σε ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου, με 24 μαθητές, στα πλαίσια της δημιουργικής εργασίας. Για την υλοποίηση της εργασίας απαιτήθηκαν 8 διδακτικές ώρες στο σχολείο (σχολική τάξη και εργαστήριο υπολογιστών) και αρκετές ώρες στον προσωπικό χώρο των μαθητών (σπίτι).

Αρχικά οι 24 μαθητές χωρίστηκαν σε 4 ομάδες (Α, Β, Γ και Δ) και σε κάθε ομάδα μοιράστηκαν τα αντίστοιχα φύλλα εργασίας (1, 2, 3 και 4). Οι μαθητές κάθε ομάδας συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και υποβοηθούμενοι από τον εκπαιδευτικό κλήθηκαν να συμπληρώσουν τα αντίστοιχα φύλλα εργασίας. Κάθε φύλλο εργασίας έχει σαφείς οδηγίες που κατευθύνουν την εργασία των μαθητών και βοηθητικά φύλλα που διευκολύνουν τις προσπάθειές τους.

III. Επιλεγμενα Αποτελεσματα

- Η κατασκευή fractals σε πίνακα με καμβά

- Ολοκληρωμένα φύλλα εργασίας μιας ομάδας, που καταγράφονται παρακάτω (οι απαντήσεις των μαθητών είναι με κόκκινο χρώμα)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch

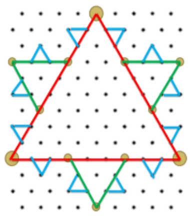
Στο σχήμα με τις τελείες:

Α. Ξεκινήστε σχεδιάζοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 9 μονάδων (θεωρήστε μονάδα μέτρησης την απόσταση από δύο οριζόντιες τελείες) και για ευκολία υποθέστε ότι το μήκος της πλευράς του είναι μοναδιαίο, δηλαδή 1 ($\nu=0$).

Β. Τριχοτομήστε την κάθε πλευρά του τριγώνου και αντικαταστήστε το μεσαίο τρίτο από μια ισόπλευρη «προεξοχή» που αποτελείται από δύο νέα τμήματα, ίσα με το ένα τρίτο του αρχικού τμήματος ($\nu=1$).

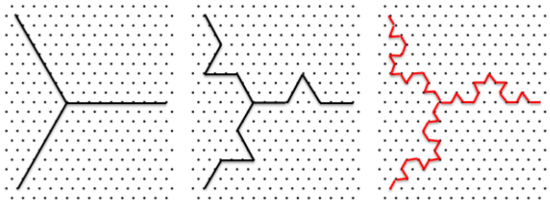
Γ. Επαναλάβετε την διαδικασία αυτή για τα νέα τμήματα που προέκυψαν, αλλά και για τα υπόλοιπα δύο τρίτα του αρχικού τμήματος των πλευρών ($\nu=2$).

Δ. Επαναλάβετε για μία φορά ακόμη ($\nu=3$).



Ε. Μπορείτε να σχεδιάσετε το σχήμα που θα προκύψει στο επόμενο βήμα ($\nu=2$);

ΑΡΧΗ **ΒΗΜΑ 1** **ΒΗΜΑ 2**

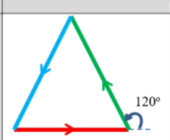


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch με L-συστήματα

Α. Χρησιμοποιήστε τα βέλη που υπάρχουν στα δύο πρώτα σχήματα του παρακάτω πίνακα, ώστε να συμπληρώσετε τις εντολές της πρώτης και δεύτερης γραμμής του πίνακα.

Β. Βρείτε το αξίωμα και τους κανόνες του συγκεκριμένου L-συστήματος.

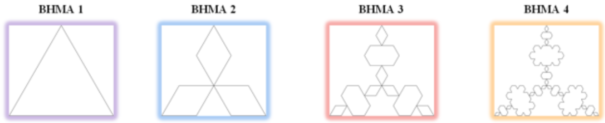
Βήμα	Σχήμα	Εντολή	Αξίωμα-Κανόνες-Γωνία
Αρχή		F++F++F	Axiom : $F++F++F$ $F \to F-F++F-F$ Angle : 60
1		F-F++F-F ++ F-F++F-F ++ F-F++F-F	

Γ. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα των L-συστημάτων και αφού διαφοροποιήσετε (λίγο) τους παραπάνω κανόνες καταγράψτε τις εικόνες που θα σχηματιστούν στα πρώτα τέσσερα βήματα.

Axiom : $F++F++F$

$F \to F+F--F+F$

Angle : 60

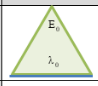
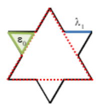
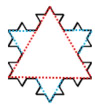
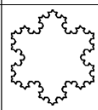


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Αναγωγικός τύπος της χιονονιφάδας του Koch (Εμβαδόν)

Α. Συμπληρώστε τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή του πίνακα. Κατόπιν συμπληρώστε ενορατικά την πέμπτη γραμμή του πίνακα ($\nu=5$).

Β. Βρείτε τους γενικούς τύπους στο ν βήμα και εκτιμήστε τα αποτελέσματα στην περίπτωση που το ν μεγαλώσει απεριόριστα ($\nu\to\infty$).

Βήμα	Σχήμα	Αριθμός πλευρών	Μήκος κάθε πλευράς	Αριθμός νέων ισοπλεύρων τριγώνων	Εμβαδόν κάθε νέου ισοπλεύρου τριγώνου	Εμβαδόν
Αρχή		$\alpha_0=3$	λ_0			$E_0=\lambda_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}$
1		$\alpha_1=4\cdot\alpha_0$ $\alpha_1=4\cdot 3$ $\alpha_1=12$	$\lambda_1=\frac{1}{3}\lambda_0$	$\alpha_0=3$	$\varepsilon_0=\lambda_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\varepsilon_0=\frac{1}{3^2}\lambda_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\varepsilon_0=\frac{1}{3^2}E_0$	$E_1=E_0+\alpha_0\cdot\varepsilon_0$ $E_1=E_0+3\frac{1}{3^2}E_0$ $E_1=\left(1+\frac{1}{3}\right)E_0$
2		$\alpha_2=4\cdot\alpha_1$ $\alpha_2=4\cdot 4\cdot\alpha_0$ $\alpha_2=4^2\cdot 3$ $\alpha_2=16\cdot 3=48$	$\lambda_2=\frac{1}{3}\cdot\lambda_1$ $\lambda_2=\frac{1}{3^2}\lambda_0$	$\alpha_1=12$	$\varepsilon_1=\lambda_2^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\varepsilon_1=\frac{1}{3^4}\lambda_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\varepsilon_1=\frac{1}{3^4}E_0$	$E_2=E_1+\alpha_1\cdot\varepsilon_1$ $E_2=E_1+4\cdot 3\frac{1}{3^4}E_0$ $E_2=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}\right)E_0$
3		$\alpha_3=4^3\cdot 3$ $\alpha_3=64\cdot 3=192$	$\lambda_3=\frac{1}{3^3}\lambda_0$	$\alpha_2=48$	$\varepsilon_2=\lambda_3^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\varepsilon_2=\frac{1}{3^6}E_0$	$E_3=E_2+\alpha_2\cdot\varepsilon_2$ $E_3=E_2+4^2 3\frac{1}{3^6}E_0$ $E_3=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}\right)E_0$
5		$\alpha_5=4^5\cdot 3$	$\lambda_5=\frac{1}{3^5}\lambda_0$	$\alpha_4=768$	$\varepsilon_4=\frac{1}{3^{10}}E_0$	$E_5=\left[1+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]E_0$
ν		$\alpha_\nu=4^\nu\cdot 3$	$\lambda_\nu=\frac{1}{3^\nu}\lambda_0$	$\alpha_{\nu-1}$	$\varepsilon_{\nu-1}=\frac{1}{3^{2\nu}}E_0$	$E_\nu=\left[1+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]E_0$
$\nu\to\infty$		$\alpha_\infty=\infty$	$\lambda_\infty=0$	$\alpha_\infty=\infty$	$\varepsilon_\infty=0$	$E_\infty=\left(1+\frac{3}{5}\right)E_0=\frac{8}{5}E_0$

Γ. Μπορείτε να αναφέρετε ένα «περίεργο» γνώρισμα της χιονονιφάδας του Koch;

Η χιονονιφάδα του Koch έχει πεπερασμένο εμβαδόν και άπειρη περίμετρο.

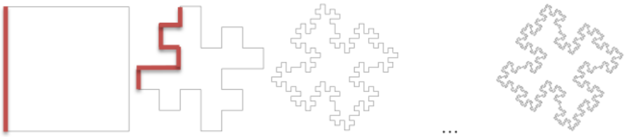
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Διάσταση του περιγράμματος της χιονονιφάδας του Koch

Α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να βρείτε τη διάσταση (ομοιότητας) της χιονονιφάδας του Koch (χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό των λογαρίθμων).

Σχήμα	ΖΟΥΜ=Ν=3 (τριπλασιασμός)		Διάσταση (ο εκθέτης)
	Πλήθος αντιγράφων		
	σε απλή μορφή	σε εκθετική μορφή	
Περίγραμμα της Χιονονιφάδας του Koch 			$4=3^D$ $D=\frac{\log 4}{\log 3}$ $D\simeq 1,26$
Αντίγραφα	$M=4$	$N^D=3^D$	

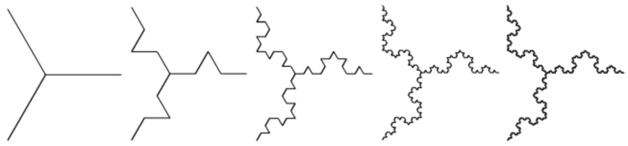
Β. Αν στον υποτετραπλασιασμό ενός τετραγώνου εμφανιζόταν το παρακάτω σχήμα τότε μπορείτε να βρείτε ποια θα ήταν η διάσταση του fractal;



Γ. Μπορείτε να βρείτε τη διάσταση του παραπάνω fractal; Αν το μήκος της πλευράς του αρχικού σχήματος ήταν 1, τότε το επόμενο σχήμα θα είχε πλευρά μήκους $\mathbf{8}$, οπότε

$$\mathbf{8 = 4^D \Leftrightarrow D = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3\log 2}{2\log 2} = 1{,}5}$$

Δ. Μπορείτε να βρείτε τη διάσταση του παρακάτω fractal;



Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα έχουμε $M = 4$ αντίγραφα όμοια με το προηγούμενο και κλίμακα $r = \frac{1}{3}$ (οπότε $N = 3$), άρα $M = N^D \Leftrightarrow \mathbf{4 = 3^D \Leftrightarrow D = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1{,}26}$

IV.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσα από τις επαναληπτικές διαδικασίες των fractals οι μαθητές προσέγγισαν την έννοια του μήκους, του εμβαδού, των ακολουθιών (γεωμετρική πρόοδος), της ομοιότητας, των ορίων, καθώς, επίσης και των συναρτήσεων (μετασχηματισμών). Έτσι, οι μαθητές διερεύνησαν παραδοσιακές περιοχές των μαθηματικών με έναν διαφορετικό τρόπο, έκαναν συσχετισμούς ανάμεσα στα μαθηματικά και το φυσικό κόσμο και εξερεύνησαν τα μαθηματικά με μη αναλυτικούς τρόπους. Αυτή η προσέγγιση έγινε με αίσθημα χαράς και έτσι δυσνόητες μαθηματικές έννοιες κατανοήθηκαν καλύτερα από τους μαθητές.

Από την άλλη μεριά η σχεδίαση των fractals τόσο στο χαρτί όσο και στην οθόνη ενός υπολογιστή βοήθησε τους μαθητές να πειραματισθούν, να καλλιεργήσουν τη φαντασία τους και αναπτύξουν την επινοητικότητά τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι μέσα από τις επαναληπτικές διαδικασίες οι μαθητές μπόρεσαν να συνειδητοποιήσουν ότι πολύπλοκες δομές είναι εφικτό να προέλθουν από απλά σχήματα και έτσι ήρθαν πιο κοντά στις δυναμικές διαδικασίες της φύσης. Η δυνατότητα αυτή προσφέρθηκε από το πρόγραμμα των L-συστημάτων, όπου οι μαθητές παρατήρησαν βήμα-βήμα την κατασκευή ενός fractal αντικειμένου και είχαν την ευκαιρία να δουν την ιστορική εξέλιξη ενός fractal, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της αναδρομής του προγράμματος. Η συμβολή των ηλεκτρονικών υπολογιστών ήταν καθοριστική για την αντιληπτική πληρότητα των fractals και σημαντική για τη δημιουργία νέων fractals από τους μαθητές.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με το πέρας της συγκεκριμένης εργασίας, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω από καρδιάς τον Καθηγητή και επιβλέποντα κ. Ανούση Μιχάλη για τις χρήσιμες υποδείξεις του κατά την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, οι οποίοι με τις γνώσεις τους με βοήθησαν να στοχαστώ και να προβληματιστώ πάνω στη διδακτική και τα μαθηματικά, να διευρύνω τους ορίζοντες των γνώσεων μου, καθώς, επίσης και τον τρόπο σκέψης μου.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Aliprantis, C., & Border, K. (2005). *Infinite Dimensional Analysis* (3η εκδ.). Berlin: Springer.

Barnsley, M. (1993). *Fractals Everywhere.* Massachusetts: Academic Press Professional.

Leifsson, P. (2006). *Fractal sets and dimensions.* Sweden: Linkopings Universitet.

Αρτεμιάδης, Ν. (1995). Χάος-fractals-δυναμικά συστήματα. *Μαθηματική Επιθεώρηση*(43), σσ. 1-19.

Δρακόπουλος, Β., & Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ. (1997). Η νέα διάσταση της εκπαιδευτικής μαθηματικής σκέψης. *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.*

Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λ. (2000). *Στοιχεία Fractal γεωμετρίας.* Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μπούντης, Τ. (2004). *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals.* Leader books.