

Διδασκαλία της Εκθετικής Συνάρτησης με Ιστορική Προοπτική

Θεόδωρος Ζώης

Μαθηματικός & Μετ. Φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

thodoriszois@hotmail.com

Κώστας Νικολαντωνάκης

Καθηγητής και Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ

knikolantonakis@uowm.gr

Περίληψη – Η παρούσα έρευνα μελετάει την διδασκαλία και μάθηση της εκθετικής συνάρτησης με χρήση στοιχείων από την ιστορική της εξέλιξη. Για την επίτευξή της σχεδιάστηκαν φύλλα εργασίας και εξετάστηκε η ατομική και ομαδική απόδοση μιας ομάδας μαθητών Β' Λυκείου. Η χρήση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία έγινε μέσω αναφορών από το βιβλίο του Euler «Introduction to Analysis of the Infinite (1748)». Συγκεκριμένα μελετήθηκαν οι ιδιότητες των δυνάμεων, ο υπολογισμός όρων εκθετικών συναρτήσεων, η γραφική παράσταση εκθετικών συναρτήσεων αλλά και η ερμηνεία τους καθώς και προβλήματα αύξησης πληθυσμού με εκθετική τάση. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, παρατηρείται ότι η απόδοση των μαθητών κυμάνθηκε σε μέτρια επίπεδα όσον αφορά την κατανόηση και τη δυνατότητα επίλυσης των ασκήσεων ωστόσο η δυνατότητα συνεργατικής προσπάθειας βοήθησε τους αδύναμους μαθητές να έχουν καλύτερα αποτελέσματα. Επιπλέον οι μαθητές εμφανίστηκαν ιδιαίτερα θετικοί στον συνεργατικό τρόπο δράσης σε αντίθεση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, συμφώνησαν ότι η χρήση των φύλλων εργασίας υπήρξε μία επωφελής μέθοδος ως προς την ενεργητική συμμετοχή, την αφομοίωση μαθηματικών εννοιών και την ενίσχυση των αδύναμων μαθητών. Σημαντικοί παράγοντες για την κατανόηση των προβλημάτων και για την ανάπτυξη του ενδιαφέροντος θεωρήθηκαν η χρήση καθοδηγητικών ερωτήσεων από τον καθηγητή, η συνεργατική προσπάθεια, η χρήση ιστορικών στοιχείων και η μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων. Επίσης η ομαδική συνεργασία φαίνεται να ενισχύεται κατά την μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων και η ενεργή συμμετοχή με τη χρήση ιστορικών στοιχείων.

Λέξεις-Κλειδιά: Εκθετική συνάρτηση, ιστορία των μαθηματικών, συνεργατική μάθηση, καθοδηγητικές ερωτήσεις, μαθηματικά προβλήματα

I. Εισαγωγή

Οι αρχές και τα πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά, που δημοσιεύθηκαν τον Απρίλιο του 2000 από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών στις ΗΠΑ, συμβουλεύουν ότι «το πρόγραμμα μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πρέπει να είναι τόσο ευρύ όσο και βαθύ». Υπό το πρίσμα αυτής της καθοδήγησης, η μελέτη των λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ιδιαίτερα στην δημιουργία ενός τρόπου για να μοντελοποιηθούν μερικά από τα πραγματικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές έξω από την τάξη. Τέτοια προβλήματα εντοπίζονται σε επιστήμες όπως η ιατρική, τα μαθηματικά, οι οικονομικές και

πολιτικές επιστήμες. Τα βιβλία του σχολείου σήμερα, περιλαμβάνουν τη θεωρία των εκθετικών και των λογαριθμών μαζί με τη μελέτη των σύγχρονων εφαρμογών που δίνουν νόημα στη μελέτη. Γενικά υπογραμμίζεται ότι η προσοχή πρέπει να επικεντρωθεί στην υφιστάμενη ανάγκη για αύξηση του βαθμού ευαισθητοποίησης των μαθητών σχετικά με την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθηματικών και των ιστορικών καταστάσεων από τις οποίες αναπτύχθηκαν. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η μελέτη της ιστορίας των εκθετικών και των λογαριθμών (Boyer, 1969; Glaz; Jankvist, 2009; Lapin, 2008; Maor, 1994; Γιαννακούλιας, 2007) είναι ένα πρωταρχικό παράδειγμα του πώς τα θεωρητικά μαθηματικά έχουν γίνει περισσότερο ζωντανή σημασία για την τεχνολογικά προσαρμοσμένη κοινωνία μας. Άξονες που μελετάει η παρούσα εργασία αποτελούν η χρησιμότητα της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και η τόνωση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Επίσης η κατανόηση ότι η σημερινή μορφή των μαθηματικών δεν προέκυψε τυχαία αλλά μέσα από σταδιακή εξέλιξη στους αιώνες και ότι η γνώση είναι αποτέλεσμα σταδιακού χτισίματος και όχι μια παθητική διαδικασία.

II. Μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία έγινε χρήση 6 φύλλων εργασίας καθώς και 2 φύλλων αξιολόγησης - 1 για το γνωστικό επίπεδο και 1 σχετικά με τα διαφορετικά εργαλεία και μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Η διάρκεια της παρέμβασης με τα φύλλα εργασίας ήταν συνολικά δέκα ώρες και οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τριών ατόμων. Ο ρόλος του καθηγητή ήταν να κατευθύνει προς τη λύση, εφόσον ήταν αναγκαίο, με χρήση κατάλληλων ερωτήσεων και όχι να δίνει άμεσα την σωστή απάντηση.

Στο 1ο φύλλο εργασίας οι μαθητές εργάστηκαν στις πράξεις και τις ιδιότητες των δυνάμεων, ενώ στο 2ο φύλλο εργασίας έγινε μια εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης μέσα από ένα πρόβλημα. Στο 3ο φύλλο εργασίας οι μαθητές διαπραγματεύθηκαν τον υπολογισμό όρων εκθετικών συναρτήσεων και στην γραφική αναπαράσταση και ερμηνεία αυτών. Στη συνέχεια στο 4ο φύλλο εργασίας οι μαθητές εργάστηκαν με το παραδοσιακό πρόβλημα τοκισμού που στόχο έχει να τους βοηθήσει να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει ο αριθμός e , ενώ στο 5ο φύλλο οι μαθητές διαπραγματεύθηκαν ένα πρόβλημα αύξησης

πληθυσμού που είχε ως βάση την εκθετική συνάρτηση. Τέλος, στο 6ο φύλλο εργασίας οι μαθητές επεξεργάστηκαν τις ιδιότητες της εκθετικής σε σχέση με την μονοτονία, έλυσαν εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις αλλά και εκθετικά συστήματα. Στο σύνολο των έξι φύλλων εργασίας περιλαμβάνονταν πληροφορίες και στοιχεία που αφορούν στην ιστορία των μαθηματικών και το έργο σημαντικών επιστημόνων. Μετά το πέρας των φύλλων εργασίας οι μαθητές υποβλήθηκαν σε Γνωστικό τεστ το οποίο είχε κλασικές ασκήσεις και προβλήματα σε όλη την ύλη και συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο.

Το ερωτηματολόγιο επικεντρώνονταν στις απόψεις των μαθητών για μια σειρά παραμέτρους και μέσα της διδακτικής παρέμβασης και αποτελούνταν από 16 ερωτήσεις τύπου Likert. Από αυτές οι πρώτες 3 ερωτήσεις αφορούσαν την άποψη των μαθητών για τα οφέλη της χρήσης των φύλλων εργασίας σχετικά με την ενεργητική συμμετοχή, την αφομοίωση γνώσεων και την ενίσχυση των αδύναμων μαθητών. Η 4η ερώτηση αναφέρονταν στην άποψη των μαθητών για το αν πρέπει τα φύλλα εργασίας να εφαρμόζονται καθολικά στη διδασκαλία ενώ οι ερωτήσεις 5-8 σχετιζόνταν με τη σημαντικότητα και το ενδιαφέρον των ιστορικών στοιχείων. Οι ερωτήσεις 9 και 12 αφορούσαν τον κατευθυντήριο ρόλο του καθηγητή ενώ οι ερωτήσεις 10 και 11 τα οφέλη της ομαδικής εργασίας. Τέλος οι ερωτήσεις 13-15 αναφέρονταν στα οφέλη της χρήσης καθημερινών προβλημάτων ενώ η ερώτηση 16 στα οφέλη της χρήσης βοηθητικών μέσων.

Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες (πράσινη και μπλε ομάδα). Κάθε φορά που ολοκλήρωναν την επεξεργασία ενός φύλλου εργασίας, οι δύο ομάδες συζητούσαν τις απαντήσεις που είχαν δώσει και με τη βοήθεια του καθηγητή προσπαθούσαν να εντοπίσουν και να διορθώσουν τα λάθη που ενδεχομένως είχαν κάνει. Σε κάθε ομάδα, προς διευκόλυνσή της, είχαν χορηγηθεί μία αριθμομηχανή για υπολογισμούς και χαρτιά μιλιμετρέ για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων που ζητούνταν.

Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία προσπάθησε να εστιάσει η παρούσα εργασία ήταν τα παρακάτω: 1) Πώς κρίνεται η επίδοση των μαθητών του δείγματος στα φύλλα εργασίας που περιλαμβάνουν στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών; 2) Οι μαθητές θεωρούν ότι η χρήση των φύλλων εργασίας υπήρξε επωφελής ως προς την ενεργητική συμμετοχή, την αφομοίωση εννοιών αλλά και την ενίσχυση των αδύναμων μαθητών; 3) Οι μαθητές θεωρούν ότι η χρήση των φύλλων εργασίας πρέπει να χρησιμοποιείται καθολικά στη διδασκαλία; 4) Η χρήση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία θεωρείται σημαντική αλλά και ωφέλιμη από τους μαθητές όσον αφορά την ενίσχυση του ενδιαφέροντος, την κατανόηση μαθηματικών εννοιών αλλά και των πρακτικών εφαρμογών τους; 5) Η χρήση καθοδηγητικών ερωτήσεων εκ μέρους του καθηγητή βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την λύση του προβλήματος αλλά και να αναπτύξουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον συγκριτικά με την παραδοσιακή διδασκαλία; 6) Οι μαθητές θεωρούν ότι η συνεργατική προσπάθεια υπήρξε επωφελής και γενικότερα τους βοήθησε ως προς την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων; 7) Η μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων σε συνδυασμό με την ιστορική προοπτική που παρουσιάζεται μέσα από τα

φύλλα εργασίας βοήθησε τους μαθητές ως προς την κατανόηση και την ανάπτυξη ενδιαφέροντος στο μάθημα; 8) Τα βοηθητικά μέσα αποτέλεσαν σημαντικό παράγοντα στην επίλυση των προβλημάτων; 9) Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των απόψεων των μαθητών; 10) Υπάρχει συσχέτιση των απόψεων των μαθητών με την απόδοση τους στα φύλλα εργασίας;

III. Επιλεγμένα Αποτελέσματα

Στο 4ο Φύλλο Εργασίας δόθηκε ένα πρόβλημα με μερικώς καθοδηγητική μορφή: Δανείτετε σε ένα φίλο σας 100€ τα οποία θα σας επιστρέψει σε ένα χρόνο. Για την επιστροφή των χρημάτων σας δίνει 4 επιλογές:

A. Να βρείτε τα χρήματα που θα σας επιστρέψει στο τέλος του χρόνου σε κάθε μία από τις περιπτώσεις: (χρησιμοποιείστε τη διαδικασία που χρησιμοποιούμε στην 3η περίπτωση παρακάτω).

1. Τα χρήματα τοκίζονται 1 φορά με επιτόκιο 100%.

2. Τα χρήματα τοκίζονται 2 φορές με επιτόκιο (100/2)% (δηλαδή 1/2) κάθε φορά.

3. Τα χρήματα τοκίζονται 3 φορές με επιτόκιο (100/3)% (δηλαδή 1/3) κάθε φορά.

$$100 + 1/3 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 1/3)$$

$$100 \cdot (1 + 1/3) + 1/3 \cdot [100 \cdot (1 + 1/3)] = 100 \cdot (1 + 1/3) \cdot (1 + 1/3)$$

$$= 100 \cdot (1 + 1/3)^2$$

$$100 \cdot (1 + 1/3)^2 + 1/3 \cdot [100 \cdot (1 + 1/3)] = 100 \cdot (1 + 1/3)^2 \cdot (1 + 1/3) = 100 \cdot (1 + 1/3)^3$$

4. Τα χρήματα τοκίζονται με επιτόκιο (100/4)% (δηλαδή 1/4) κάθε φορά.

Και οι δύο ομάδες κατάφεραν να υπολογίσουν σωστά το ποσό που θα επιστραφεί στο τέλος του χρόνου σε κάθε περίπτωση δίνοντας τα σωστά συμπεράσματα: 200, $100 \cdot (1 + 1/2)^2$ και $100 \cdot (1 + 1/4)^4$

B. Ποια από τις 4 περιπτώσεις σας συμφέρει;

Και οι δύο ομάδες κατέληξαν πως η πλέον συμφέρουσα περίπτωση είναι η τέταρτη.

Γ. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις φορές που τοκίζονται τα χρήματα και το ποσό που θα πάρετε στο τέλος του χρόνου;

Και οι δύο ομάδες απάντησαν σωστά παρατηρώντας πως το ποσό που θα εισπραχθεί στο τέλος του χρόνου αυξάνεται όσο αυξάνονται οι φορές που θα τοκιστεί.

Δ. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

v	1	2	3	4	10	100	10000	100000	1000000
$(1 + \frac{1}{v})^v$									

Και οι δύο ομάδες συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα με τη χρήση των αριθμομηχανών που τους είχαν δοθεί.

E. Πόσα χρήματα θα πάρετε αν τα τοκίσετε 100.000 φορές και πόσα αν τα τοκίσετε 1.000.000 φορές; Τι παρατηρείτε;

Και οι δύο ομάδες κατόρθωσαν να υπολογίσουν σωστά το ποσό που θα επιστραφεί αν το αρχικό ποσό των 100€ τοκιστεί 100.000 φορές και 1.000.000 φορές.

Η Πράσινη ομάδα παρατήρησε πως το τελικό ποσό είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις ενώ η Μπλε ομάδα παρατήρησε πως το ποσό είναι ελάχιστα μεγαλύτερο στη δεύτερη περίπτωση όπου τοκίζεται 1.000.000 φορές.

ΣΤ. Ποια τιμή προσεγγίζει η παράσταση $(1 + 1/v)^v$ όταν το v τείνει στο άπειρο;

Τα μέλη και των δύο ομάδων απάντησαν πως η τιμή την οποία προσεγγίζει η εν λόγω παράσταση καθώς το ν τείνει στο άπειρο είναι ο αριθμός 2.718.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν οι απαντήσεις των ομάδων στο 5ο Φύλλο Εργασίας στο οποίο μελετήσαμε ένα πρόβλημα αύξησης του πληθυσμού που υπάρχει στο βιβλίο του Euler “Introduction to Analysis of the Infinite” (1748): «Σε μια συγκεκριμένη περιοχή υπάρχουν 100.000 άτομοι. Αν ο πληθυσμός αυξάνεται κατά το ένα τριακοστό (1/30) κάθε χρόνο, θα θέλαμε να μάθουμε τον πληθυσμό μετά από 100 χρόνια.»

A. Να συμπληρώσετε τα κενά διαστήματα.

1. Ο πληθυσμός μετά τον 1ο χρόνο:

$$100.000 + (1/30) \cdot 100.000 = 100.000 \cdot (1 + 1/30) = 100.000 \cdot 31/30$$

2. Ο πληθυσμός μετά το 2ο χρόνο:

$$100.000 \cdot (31/30) + (1/30) \cdot [100.000 \cdot (31/30)] = 100.000 \cdot (31/30) \cdot (1 + 1/30) = 100.000 \cdot (31/30)^2$$

3. Ο πληθυσμός μετά τον 3ο χρόνο;

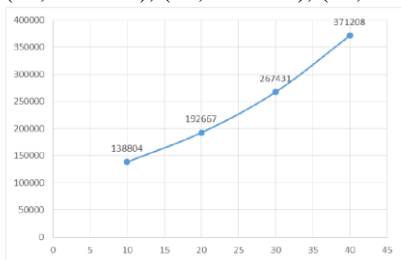
4. Ο πληθυσμός μετά τον 4ο χρόνο;

Και οι δύο ομάδες των μαθητών κατάφεραν να δώσουν σωστές απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα σχετικά με τον πληθυσμό, δηλαδή ότι αυτός θα είναι $100.000 \cdot (31/30)^3$ μετά τον 3ο χρόνο και $100.000 \cdot (31/30)^4$ μετά τον 4ο χρόνο.

Στην ερώτηση B. Να γράψετε την εκθετική συνάρτηση $f(x)$ που δίνει τον πληθυσμό μετά από x χρόνια και οι δύο ομάδες έδωσαν τη σωστή απάντηση ότι η εκθετική συνάρτηση είναι η $f(x) = 100.000 \cdot (31/30)^x$

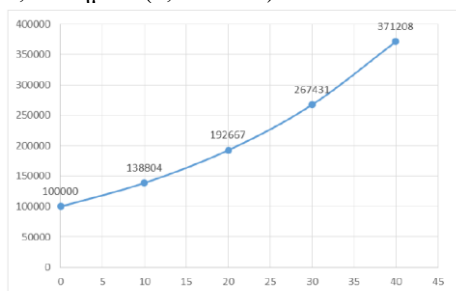
Για την ερώτηση Γ. Για την παραπάνω εκθετική συνάρτηση να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών συμπληρώσαν όλοι σωστά τον πίνακα τιμών με βάση τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης που είχαν βρει.

Στην ερώτηση Δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τα μέλη της Πράσινης ομάδας συνεργάστηκαν στη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης επιλέγοντας από κοινού τα σημεία (10, 138.804), (20, 192.667), (30, 267.431), (40, 371.208).



Σχήμα 1. Σχήμα της Πράσινης ομάδας για την εκθετική συνάρτηση

Στην μπλε ομάδα δύο μαθητές επέλεξαν τα ίδια με την άλλη ομάδα σημεία ενώ ένας μαθητής χρησιμοποίησε, επιπλέον, το σημείο (0, 100.000).



Σχήμα 2. Σχήμα της Μπλε ομάδας για την εκθετική συνάρτηση

Οι μαθητές και των δύο ομάδων παρότι δε δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν τις τεταγμένες των σημείων αυτών, αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στην τοποθέτησή τους πάνω στο σύστημα αξόνων εξαιτίας του μεγέθους τους.

Ε. Με βάση τη μελέτη της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

1. «Τι θα συμβεί αν ο αρχικός πληθυσμός αυξηθεί ή μειωθεί;» όπου και οι δύο ομάδες απάντησαν πως οι τιμές της συνάρτησης θα αυξηθούν/μειωθούν σε περίπτωση αύξησης/μείωσης του αρχικού πληθυσμού. Επιπλέον, ένας μαθητής της μπλε ομάδας συμπλήρωσε πως η κλίση της γραφικής παράστασης θα αυξηθεί σε περίπτωση αύξησης του αρχικού πληθυσμού.

Στην 2^η ερώτηση σχετικά με το «Τι θα συμβεί αν ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος;» και οι δύο ομάδες απάντησαν πως αν αυξηθεί/μειωθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης θα είναι μεγαλύτερες/μικρότερες.

3. Τι θα συμβεί αν ο αρχικός πληθυσμός μειώνεται κατά 1/30 κάθε χρόνο; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε ποιος θα είναι ο πληθυσμός μετά από 330 και 350 χρόνια.

Αν και τα μέλη της Πράσινης ομάδας, συμφώνησαν στη μεταξύ τους συζήτηση πως λογικά ο τελικός πληθυσμός θα είναι μικρότερος αν παρατηρείται μείωση κατά 1/30 κάθε χρόνο, παρόλα αυτά δε μπόρεσαν να στηρίξουν με κάποια μαθηματική εξήγηση την άποψή τους και τελικά δεν έδωσαν καμία απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Τα μέλη της Μπλε ομάδας επίσης συμφώνησαν μεταξύ τους πως σε αυτή την περίπτωση ο πληθυσμός θα μειώνεται. Επιπλέον, ο πλέον δυνατός μαθητής υποστήριξε πως για να υπολογίσουν τον πληθυσμό μετά από 330 και 350 χρόνια θα πρέπει να δουλέψουν με αντίστοιχο τρόπο όπως στην περίπτωση του ερωτήματος Α με τη διαφορά ότι για κάθε χρόνο θα πρέπει να αφαιρούν από τον αρχικό πληθυσμό το 1/30 του πληθυσμού αυτού προκειμένου να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης συνάρτησης. Όμως, επειδή έγιναν κάποια λάθη στους υπολογισμούς και δεν κατάφερε να πείσει τους άλλους για την ορθότητα του συλλογισμού του τελικά η ομάδα δεν υπολόγισε τον πληθυσμό που ζητούνταν.

IV. Συμπεράσματα

Το δείγμα της έρευνας ήταν μικρό, αποτελούνταν από μαθητές Β' Λυκείου και χωρίστηκε σε 2 ομάδες. Αναφορικά με το 1ο ερευνητικό ερώτημα η επίδοση των μαθητών του δείγματος μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρια ενώ σχετικά με το 2ο ερευνητικό ερώτημα παρατηρήθηκε ότι η χρήση των φύλλων εργασίας υπήρξε ιδιαίτερα επωφελής στην ενεργητική συμμετοχή και απλά επωφελής στην αφομοίωση μαθηματικών εννοιών και στην ενίσχυση αδύναμων μαθητών. Επιπλέον στο 3ο ερευνητικό ερώτημα παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές συμφωνούν ότι η χρήση των φύλλων εργασίας πρέπει να χρησιμοποιείται καθολικά στη διδασκαλία, όπως και στο 4ο ερευνητικό ερώτημα όπου οι μαθητές συμφωνούν ότι η χρήση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία θεωρείται σημαντική αλλά και ωφέλιμη όσον αφορά την ενίσχυση του ενδιαφέροντος, την κατανόηση μαθηματικών εννοιών αλλά και των πρακτικών εφαρμογών τους. Παρόλο που

το γενικό ενδιαφέρον ήταν θετικό, ιδιαίτερα αυξημένο μπορεί να θεωρηθεί το ενδιαφέρον στο 3ο και 5ο φύλλο αξιολόγησης όπου έγινε αναφορά στο βιβλίο του Euler «Introduction to Analysis of the Infinite (1748)» στη γραφική παράσταση εκθετικών συναρτήσεων, στην κατηγοριοποίηση των γραφικών παραστάσεων ως προς την μονοτονία τους αλλά και στον υπολογισμό αύξησης ή μείωσης του πληθυσμού με εκθετική τάση. Έπειτα, στο 5ο ερευνητικό ερώτημα οι μαθητές συμφωνούν σε έντονο βαθμό ότι η χρήση καθοδηγητικών ερωτήσεων εκ μέρους του καθηγητή βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την λύση του προβλήματος αλλά και να αναπτύξουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον συγκριτικά με την παραδοσιακή διδασκαλία, όπως και στο 6ο ερευνητικό ερώτημα όπου οι μαθητές συμφωνούν απόλυτα ότι η διαδικασία διαλόγου και ανοιχτής συζήτησης των απαντήσεων που ακολούθησε την ολοκλήρωση των φύλλων εργασίας υπήρξε επωφελής ενώ συμφώνησαν απλά ότι η ομαδική εργασία βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση και επίλυση των ερωτημάτων που τέθηκαν στα φύλλα εργασίας. Αναφορικά με το 7ο ερευνητικό ερώτημα οι μαθητές συμφωνούν ότι η μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων τους βοήθησε ως προς την κατανόηση και την ανάπτυξη ενδιαφέροντος στο μάθημα όπως και στο 8ο ερώτημα όπου οι μαθητές συμφωνούν ότι τα βοηθητικά μέσα που χορηγήθηκαν (αριθμομηχανή, χαρτί μιλιμετρέ) βοήθησαν σημαντικά στην επίλυση των φύλλων εργασίας. Ακολούθως, στο 9ο ερευνητικό ερώτημα εντοπίστηκαν 5 στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις. Ένα μέρος των συσχετίσεων αυτών έδειξε ότι τα άτομα που πιστεύουν έντονα ότι είναι σημαντικό να υπάρξει καθολική εφαρμογή της χρήσης των φύλλων εργασίας στη διδασκαλία, πιστεύουν ταυτόχρονα σε μεγάλο βαθμό ότι η χρήση φύλλων εργασίας στη διδασκαλία ωφέλησε περισσότερο τους αδύναμους μαθητές και ταυτόχρονα ότι η ανακάλυψη μιας έννοιας από το μαθητή με καθοδήγηση του μέσω κατάλληλων ερωτήσεων παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον από την κλασική μέθοδο παροχής πληροφοριών από τον καθηγητή. Συνεπώς η προτίμηση των φύλλων εργασίας σαν βασικό εργαλείο διδασκαλίας έγκειται στο γεγονός ότι βοηθήθηκαν κυρίως οι αδύναμοι μαθητές καθώς και λόγω του αυξημένου ενδιαφέροντος που προκάλεσε στους μαθητές ο ρόλος του καθηγητή με χρήση στοχευμένων ερωτήσεων. Επιπλέον, οι μαθητές που πιστεύουν έντονα ότι η ομαδική εργασία βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση και επίλυση των ερωτημάτων που τέθηκαν στα φύλλα εργασίας πιστεύουν ταυτόχρονα ότι η μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων βοήθησε τους μαθητές ως προς την κατανόηση και την ανάπτυξη ενδιαφέροντος στο μάθημα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι η προτίμηση για ομαδική συνεργασία οφείλεται στο ενδιαφέρον που προέκυψε από την μελέτη καθημερινών μαθηματικών προβλημάτων. Ακόμη, οι μαθητές που πιστεύουν έντονα ότι η χρήση φύλλων εργασίας στη διδασκαλία οδηγεί σε περισσότερο ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία απόκτησης γνώσης, πιστεύουν ταυτόχρονα σε μεγάλο βαθμό ότι η χρήση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία θεωρείται σημαντική αλλά και ωφέλιμη όσον αφορά την ενίσχυση του ενδιαφέροντος, την κατανόηση

μαθηματικών εννοιών αλλά και των πρακτικών εφαρμογών τους. Το γεγονός αυτό πιθανόν να υποδηλώνει ότι η αυξημένη ενεργή συμμετοχή οφείλεται στη χρήση ιστορικών στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν από το βιβλίο του Euler «Introduction to Analysis of the Infinite (1748)». Τέλος αναφορικά με το 10ο ερευνητικό ερώτημα δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση των απόψεων των μαθητών με βάση την επίδοσή τους. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι όλοι οι μαθητές ανεξαρτήτου επίδοσης έχουν περίπου τις ίδιες απόψεις.

Τα φύλλα εργασίας που αξιοποιήθηκαν για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας διαμορφώθηκαν με γνώμονα την προοπτική συμπερίληψης σε αυτά και στοιχείων που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών και τη συμβολή σημαντικών εκπροσώπων της επιστήμης στη διαμόρφωσή της στη μορφή που σήμερα διδάσκεται στα σχολεία. Η παράμετρος αυτή διαφοροποιεί τα συγκεκριμένα φύλλα εργασίας σε σχέση με αυτά που συνήθιστα χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία και την εξέταση του μαθήματος. Η αξιοποίηση της συγκεκριμένης μορφής φύλλων εργασίας πράγματι συνέβαλε στη διαμόρφωση της γνώμης των μαθητών γι' αυτά, αλλά και στις επιδόσεις τους οι οποίες βελτιώνονταν μέσω της συνεργατικής δράσης. Η χρήση των ιστορικών στοιχείων οδήγησε σε ένα αυξημένο ενδιαφέρον των μαθητών για τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας, καθώς και στην ανάλογη αύξηση της διάθεσής τους να έχουν ενεργή συμμετοχή. Εξάλλου, ο συσχετισμός των ασκήσεων με τα ιστορικά στοιχεία στα οποία καθεμία από αυτές είναι βασισμένη μπορεί να αποτελέσει ένα στοιχείο που θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά και θα συμβάλλει στη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στη θεωρία και την πράξη. Εν κατακλείδι, η διαδικασία φάνηκε ότι βελτίωσε τους μαθητές και σε επίπεδο γνώσεων αλλά και ψυχολογικά σε επίπεδο κινήτρων και έγινε αποδεκτή από τους ίδιους.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε πολύ τον Καθηγητή Ζαχαριάδη Θεοδόση από το ΕΚΠΑ για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Boyer, C. B. (1969). *The history of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, 3rd edition.
- Glaz, S. *The enigmatic number e: A history in verse and its uses in mathematics classroom*. Διαθέσιμο: http://www.math.uconn.edu/~glaz/My_Articles/TheEnigmaticNumberE.Convergence10.pdf (ανακτήθηκε: 28/02/2018).
- Jankvist, U.T., (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history on mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 71 (3): 235-261.
- Lapin, S., (2008). «Leonard Paul Euler: his life and his works. MATH 398» Διαθέσιμο: <http://www.math.wsu.edu/faculty/slapin/research/presentations/Euler.pdf> (ανακτήθηκε: 28/02/2018).
- Maor, E. (1994). *“e”: The Story of a Number*. Princeton University Press Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7t8q5>.
- Γιαννακούλιας, Ε., (2007). *Απειροστικός λογισμός: Η ιστορική εξέλιξη του από τον 5ο π.Χ. έως και τον 19ο αιώνα*. Αθήνα: Συμμετρία.