

# Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων Μαγνητικού Δίπολου Χαμηλών Συχνοτήτων από Σφαιρικά Μεταλλικά Αντικείμενα σε Περιβάλλον Χωρίς Απώλειες

Ελένη Στεφανίδου

Μαθηματικός και Μεταπτ. Φοιτήτρια ΜΣΜ/ΣΘΕΤ  
ΕΑΠ

stef.el@hotmail.com, std134866@ac.eap.gr

Παναγιώτης Βαφέας

Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών  
και Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ ΕΑΠ

vafeas@chemeng.upatras.gr

*Περίληψη* – Στην εργασία αυτή διερευνούνται τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που σκεδάζονται από μεταλλική σφαίρα στο περιβάλλον του κενού. Μια χρονικά αρμονική μαγνητική διπολική πηγή, αρκετά μακριά, εκπέμπει σε χαμηλές συχνότητες το προσπίπτον πεδίο, προσανατολισμένο αυθαίρετα στον τρισδιάστατο χώρο. Σκοπός είναι η εύρεση αναλυτικής λύσης του προβλήματος σκέδασης σε σφαιρικές συντεταγμένες, χρήσιμη για την αντιστροφή δεδομένων. Βάσει της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων το πρόβλημα τύπου Maxwell μετατρέπεται σε διασυνδεδεμένες εξισώσεις Laplace ή Poisson με τις συνοριακές συνθήκες της τέλεια αγωγίμης σφαίρας και τις συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο και λύνονται σταδιακά. Η προσέγγιση του στατικού και των πρώτων τριών δυναμικών όρων αρκεί. Οι όροι υψηλότερων τάξεων είναι αμελητέοι. Για την εγκυρότητα της προσέγγισής μας, εκφυλίζονται τα αποτελέσματα της σφαιροειδούς περίπτωσης, ώστε να ανακτηθούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα της σφαιρικής.

**Λέξεις-Κλειδιά:** Ηλεκτρομαγνητικά πεδία, Σκέδαση χαμηλών συχνοτήτων, Μαγνητικό δίπολο, Σφαιρικές συντεταγμένες

## I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εφαρμογές απόκρισης σκεδαστών αυθαίρετου σχήματος, σε διάφορα μέσα, όταν διεγείρονται από πρωτογενείς πηγές, π.χ. στην ανίχνευση υπογείων της Γης (για ορυκτά, κοιλάτητες, νάρκες κ.ά.) είναι στην αιχμή της επιστήμης. Επιλύονται ως προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εκ των οποίων υπάρχουν δύο είδη. Το ευθύ, με στόχο τον καθορισμό του σκεδαζόμενου πεδίου, γνωρίζοντας τις ιδιότητες (φυσικές – γεωμετρικές) του σκεδαστή και τη διαφορική εξίσωση διάδοσης των κυμάτων και το αντίστροφο όπου αναζητούμε πληροφορίες για τη φύση του σκεδαστή ούσα γνωστή η επίδρασή του στο κυματικό πεδίο. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο πρόβλημα. Ωστόσο, καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο εάν δεν προϋπάρχει γνώση του αντίστοιχου ευθέος. Για την ασφαλή αντιμετώπιση ενός αντίστροφου προβλήματος (Ammari & Kang, 2007), ζητάμε την επίλυση του αντίστοιχου ευθέος. Με χρήση των θεμελιωδών αρχών ηλεκτρομαγνητισμού (Stratton, 1941) του Maxwell

και της θεωρίας σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων (Dassios & Kleinman, 2000) σκοπεύουμε να λάβουμε αποτελεσματικά μοντέλα με ισχυρά μαθηματικά εργαλεία (Ammari, Garnier, Jing, Kang, Lim, Solna & Wang, 2013).

Η βιβλιογραφία αναζητά την προσθήκη νέων άρθρων ενώ πολλά έχουν ήδη δημοσιευθεί. Μελέτη σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων από τέλεια αγωγή σφαίρα σε αγωγήμο περιβάλλον (Vafeas, Perrusson & Lesselier, 2004) με επαλήθευση των αποτελεσμάτων (Mie, 1908), από σφαιροειδές (Vafeas, Perrusson & Lesselier, 2009) ή ελλειψοειδές (Perrusson, Vafeas & Lesselier, 2010 και Vafeas, 2020), μελέτη εντοπισμού ορυκτού σώματος θαμμένου στη Γη (Perrusson, Vafeas, Chatjigeorgiou & Lesselier, 2015), μελέτες με δύο γειτονικές μεταλλικές σφαίρες (Vafeas, Papadopoulos & Lesselier, 2012) ή με έναν αδιαπέρατο δακτύλιο (Vafeas, Papadopoulos, Ding & Lesselier, 2016) δείχνουν την πολυπλοκότητα των αναλυτικών τεχνικών στα γεωμετρικά μοντέλα (Moon & Spencer, 1971 και Morse & Feshbach, 1953) με την εμφάνιση περίπλοκων ιδιοσυναρτήσεων (Hobson, 1965 και dlmf.nist.gov).

Συλλογίζομενοι την περίπτωση δύο σφαιρών που σχεδόν αγγίζονται (Vafeas, Lesselier & Kariotou, 2015), την τοροειδή (Vafeas, 2016), ελλειψοειδή (Vafeas, 2020) και σφαιροειδή (Vafeas, 2018) περίπτωση και αναζητώντας διαφορετικές δομές σώματος σε μέσα χωρίς απώλειες, η παρούσα εργασία ερευνά μία μεταλλική σφαίρα στο περιβάλλον του κενού. Μία χρονικά αρμονική μαγνητική διπολική πηγή εκπέμπει σε χαμηλές συχνότητες τα προσπίπτοντα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, προς τον σκεδαστή ο οποίος ανταποκρίνεται δημιουργώντας τα σκεδαζόμενα πεδία τα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε. Καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για τη μοντελοποίηση είναι το σφαιρικό (Moon et al., 1971 και Morse et al., 1953).

## II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αρχικά παραθέτουμε μία σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1. Ως  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  ορίζουμε την Καρτεσιανή βάση,  $\mathbf{E}^x$  το ηλεκτρικό πεδίο,

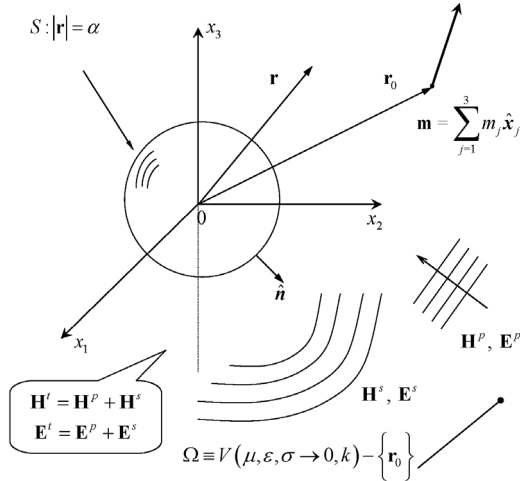
$\mathbf{H}^x$  το μαγνητικό με  $x = p, s, t$  τα προσπίπτοντα  $p$ , τα σκεδαζόμενα  $s$  και τα συνολικά  $t$  ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Επίσης,  $\mathbf{r}$  είναι το τυχαίο διάνυσμα θέσης,  $\mathbf{r}_0$  το διάνυσμα θέσης του δίπολου,  $\mathbf{m}$  το μαγνητικό δίπολο,  $\omega$  η χαμηλή κυκλική συχνότητα,  $\varepsilon$  η διηλεκτρική σταθερά,  $\mu$  η μαγνητική διαπερατότητα,  $\sigma$  η αγωγιμότητα,  $k$  ο κυματικός αριθμός,  $S$  η επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας  $\alpha$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στη σφαίρα και  $\Omega$  ο χώρος ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, ο οποίος εξαιρώντας τη θέση του δίπολου ορίζεται ως

$$\Omega \equiv V(\mathbb{R}^3) - \{\mathbf{r}_0\}. \quad (1)$$

Επίσης, το αυθαίρετα προσανατολισμένο μαγνητικό δίπολο στο Καρτεσιανό σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^3 m_j \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (2)$$

Επιπλέον, ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz με τον κυματικό αριθμό να είναι  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ .



Σχήμα 1. Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος

#### A. Φυσική και Μαθηματική Ερμηνεία

Με την τεχνική χαμηλών συχνοτήτων αναπτύσσουμε όλα τα πεδία σε άθροισμα όρων θετικών ακέραιων δυνάμεων του  $(ik)$ , όπου  $i$  η φανταστική μονάδα. Έτσι,

$$\mathbf{H}^x(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{H}_n^x(\mathbf{r}) \frac{(ik)^n}{n!}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad x = p, s, t, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}^x(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_n^x(\mathbf{r}) \frac{(ik)^n}{n!}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad x = p, s, t. \quad (5)$$

Το  $\omega$  είναι πολύ χαμηλό, άρα και το  $(ik)$ , οπότε καθώς το  $n \in \mathbb{N}$  αυξάνεται, το  $(ik)^n$  φθίνει πολύ. Επομένως, περιοριζόμαστε στους όρους για  $n = 0, 1, 2, 3$ . Οι όροι υψηλότερων τάξεων ( $n \geq 4$ ) είναι αμελητέοι.

Κάνοντας αυτή τη διαδικασία για τα προσπίπτοντα πεδία, παίρνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο τάξης 0 και τα ηλεκτρικά τάξης 0 και 2 μηδενίζονται. Επίσης, παίρνουμε χρήσιμους τύπους για τα πεδία που δεν μηδενίζονται. Τελικά, τα  $\mathbf{H}_0^s, \mathbf{H}_2^s, \mathbf{H}_3^s, \mathbf{E}_1^s, \mathbf{E}_3^s$  είναι τα ζητούμενα σκε-

δαζόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, τα οποία θα υπολογιστούν με βάση την ανάλυση που έπεται.

Οι συνοριακές συνθήκες αναφέρονται στα συνολικά πεδία και την επιφάνεια  $S$ . Με την ακύρωση των επαπτόμενων συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου και των κάθετων συνιστωσών του μαγνητικού στην  $S$ , αλλά και με μία επιπλέον επεξεργασία για κάθε  $n$ , παίρνουμε

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \equiv \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})] = 0, \quad n = 0, 2, 3, \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \equiv \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad n = 1, 3. \quad (7)$$

Οι συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller στο άπειρο που πρέπει να ικανοποιούνται είναι για κάθε  $n = 1, 2, 3$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \left[ \mathbf{r} \times \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + n|\mathbf{r}| \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (8)$$

Σύμφωνα με τα πεδία για κάθε όρο  $(ik)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , τη χρονική αρμονική εξάρτηση της πηγής και το γεγονός ότι το πρόβλημα είναι εξωτερικού τύπου, οι εξισώσεις Maxwell για τα σκεδαζόμενα πεδία, θα είναι

$$\nabla \times \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}), \quad n \geq 0 \quad (\text{Νόμος Faraday}), \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}), \quad n \geq 0 \quad (\text{Νόμος Ampère}), \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = 0, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (11)$$

#### B. Μοντελοποίηση του προβλήματος

Από τις (9) – (11) προκύπτουν τα παρακάτω. Υπάρχουν  $\Phi_0^s, \Phi_3^s$  άγνωστα βαθμωτά και  $\mathbf{X}_2^s, \mathbf{X}_3^s$  άγνωστα διανυσματικά αρμονικά πεδία, τέτοια ώστε

$$\Delta \mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \nabla \Phi_0^s(\mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) + \mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \nabla \Phi_3^s(\mathbf{r}), \quad (14)$$

$$\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \nabla \times \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}), \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = 6\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + 6 \left[ -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega' \right], \quad (16)$$

όπου το πρόβλημα μετατέθηκε στην επίλυση των

$$\Delta \Phi_0^s(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \Delta \Phi_3^s(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Τέλος, καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων είναι το σφαιρικό  $(r, \zeta \equiv \cos \theta, \varphi)$  με  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\zeta \in [-1, 1]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  βάσει του οποίου καθορίζουμε όλες τις χρήσιμες για την επίλυση σχέσεις.

### III. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από τα παραπάνω προκύπτει ακολουθία προβλημάτων συνοριακών τιμών διαφορικών εξισώσεων Laplace ή Poisson 2<sup>ης</sup> τάξης, με τις συνοριακές συνθήκες του αδιαπέρατου χαρακτήρα της μεταλλικής σφαίρας και τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver – Müller στο άπειρο. Τα παραθέτουμε παρακάτω με τις λύσεις τους. Προηγουμένως, όμως, ορίζουμε χρήσιμους τύπους.

Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace με άγνωστη την

τυχαία συνάρτηση  $u(\mathbf{r})$  δίνεται από τη σχέση

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_{l,in}^{m/q} u_{l,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + A_{l,ex}^{m/q} u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r})], \quad (18)$$

για  $\mathbf{r} \in \{r \in [0, +\infty), \zeta \in [-1, 1], \varphi \in [0, 2\pi)\}$  και επίσης με

$A_{n,in}^{m/q}, A_{n,ex}^{m/q}$  αυθαίρετες σταθερές. Ισχύει  $A_{l,ex}^{m/q} = 0$  για

εσωτερικό πρόβλημα και  $A_{l,in}^{m/q} = 0$  για εξωτερικό (όπως

το υπό μελέτη πρόβλημα). Οι ιδιολύσεις δίνονται από τις

$$u_{l,in}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^l P_l^m(\zeta) f_m^q(\varphi) = r^l Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (19)$$

$$u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^{-(l+1)} P_l^m(\zeta) f_m^q(\varphi) = r^{-(l+1)} Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (20)$$

όπου

$$Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi) = P_l^m(\zeta) f_m^q(\varphi), \quad (21)$$

να είναι οι σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις με

$$f_m^q(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, & q = e \\ \sin m\varphi, & q = o \end{cases} \quad (22)$$

και  $P_l^m$  τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre 1<sup>ου</sup>

είδους. Ακόμη, για το ανάπτυγμα  $\frac{1}{R}$ , αυτό ορίζεται ως

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \rho_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{l,in}^{m/q}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} < \mathbf{r}_0 \quad (23)$$

με

$$\rho_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \varepsilon_m u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0). \quad (24)$$

Τέλος, ο χώρος ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης δίνεται από

$$\Omega = \{(r, \zeta, \varphi) : r \in [\alpha, +\infty), \zeta \in [-1, 1], \varphi \in [0, 2\pi)\} - \{\mathbf{r}_0\} \quad (25)$$

όπου  $\mathbf{r}_s = (r_s, \zeta, \varphi) \equiv (\alpha, \zeta, \varphi)$  το διάνυσμα θέσης στην επιφάνεια της σφαίρας και  $\mathbf{r}_0 = (r_0, \zeta_0, \varphi_0)$  το διάνυσμα θέσης στο σημείο του δίπολου.

#### A. Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}_0^s$

Έχουμε το πρόβλημα  $\Delta\Phi_0^s = 0$ ,  $\mathbf{H}_0^s = \nabla\Phi_0^s$  με τη συνθήκη  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \cdot [\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) + \mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}_s)] = 0$ , η λύση του οποίου μας δίνει το βαθμωτό πεδίο

$$\Phi_0^s(\mathbf{r}) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \left[ \left( \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \rho_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right) \frac{l \alpha^{2l+1}}{l+1} r^{-(l+1)} Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi) \right], \quad (26)$$

οπότε

$$\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \left\{ \frac{l \alpha^{2l+1}}{l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \varepsilon_m \left[ \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right] \nabla u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (27)$$

για κάθε  $\mathbf{r} \in \Omega$  και  $l \geq 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, l$  και  $q = e, o$ .

#### B. Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}_2^s$

Για αυτό το πεδίο προκύπτει το πρόβλημα  $\Delta\mathbf{X}_2^s = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{H}_2^s = \mathbf{X}_2^s + \mathbf{r}\Phi_0^s$  με  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \times [\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}_s)] = \mathbf{0}$  και  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \cdot [\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) + \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)] = 0$  να αποτελούν τις επι-

βαλλόμενες συνοριακές συνθήκες. Συνεπώς, η λύση εδώ είναι η αρμονική συνάρτηση

$$\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \mathbf{b}_{l,ex}^{m/q} r^{-(l+1)} Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (28)$$

άρα και

$$\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \left[ \mathbf{b}_{l,ex}^{m/q} - \mathbf{r} \left( \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \rho_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right) \frac{l \alpha^{2l+1}}{l+1} \right] r^{-(l+1)} Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (29)$$

για  $l \geq 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, l$ ,  $q = e, o$ . Οι  $\mathbf{b}_{l,ex}^{m/q}$  είναι αυθαίρετοι διανυσματικοί συντελεστές λύσεις του συστήματος

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \left[ \sum_{j=1}^3 f_{l,j}^{m/q,\kappa}(r_s, \zeta, \varphi) \mathbf{b}_{l,j}^{m/q} - \mathbf{g}_1^{m/q,\kappa}(r_s, \zeta, \varphi; \mathbf{r}_0) \right] = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (30)$$

με τα  $f_{l,j}^{m/q,\kappa}$  και  $\mathbf{g}_1^{m/q,\kappa}$  να υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες συναρτήσει των  $Y_l^{m/q}$ ,  $P_l^m$ ,  $f_m^q$ .

#### C. Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}_3^s$

Για το πεδίο  $\mathbf{H}_3^s$  έχουμε το πρόβλημα  $\Delta\Phi_3^s = 0$  με  $\mathbf{H}_3^s = \nabla\Phi_3^s$  και  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \cdot [\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) + \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}_s)] = 0$  ως συνοριακή συνθήκη. Η λύση υπολογίζεται

$$\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha}{r} \right)^3 \left[ (2\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{m} \cdot \hat{\zeta}) \hat{\zeta} - (\mathbf{m} \cdot \hat{\varphi}) \hat{\varphi} \right], \quad (31)$$

ή, ορίζοντας την διάταξη “ $\otimes$ ”, παίρνουμε

$$\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \left( \frac{\alpha}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{m}}{2\pi} \cdot [3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbb{I}^3]. \quad (32)$$

#### D. Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_1^s$

Εδώ, έχουμε μια απλή αντικατάσταση στη σχέση (15) αφού έχουμε ήδη υπολογίσει το  $\mathbf{H}_2^s$ . Επομένως, θα είναι

$$\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \left\{ \nabla u_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{b}_{l,ex}^{m/q} - \mathbf{r} \left( \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \rho_{l,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right) \frac{l \alpha^{2l+1}}{l+1}] \right\}. \quad (33)$$

#### E. Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_3^s$

Εδώ, προκύπτει το πιο σύνθετο πρόβλημα  $\Delta\mathbf{X}_3^s = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{E}_3^s = \mathbf{X}_3^s - \frac{3}{2\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega', \quad \text{όπου οι συνοριακές συν-}$$

θήκες είναι η σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}_s) = 0$  και η συνοριακή σχέση  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \times [\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}_s)] = \mathbf{0}$ . Η λύση είναι η

$$\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{q=e,o} \mathbf{d}_{l,ex}^{m/q} r^{-(l+1)} Y_l^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (34)$$

για  $l \geq 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, l$ ,  $q = e, o$ . Οι  $\mathbf{d}_{l,ex}^{m/q}$  είναι αυθαίρετοι διανυσματικοί συντελεστές λύσεις του παρακάτω συστήματος

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^1 \sum_{q=e,o} \left[ \sum_{j=1}^3 \bar{f}_{1,j}^{m/q,\kappa} (r_s, \zeta, \varphi) d_{1,j}^{m/q} - \bar{g}_1^{m/q,\kappa} (r_s, \zeta, \varphi; \mathbf{r}_0) \right] = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (35)$$

με τα  $\bar{f}_{1,j}^{m/q,\kappa}$  και  $\bar{g}_1^{m/q,\kappa}$  να υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες συναρτήσεων των  $Y_1^{m/q}$ ,  $P_1^m$ ,  $f_m^q$ . Για να προχωρήσουμε στην αντικατάσταση του  $\mathbf{X}_3^s$  στη σχέση (16) ώστε να βρεθεί το  $\mathbf{E}_3^s$  θα πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε το τριπλό ολοκλήρωμα σε μία εύχρηστη μορφή αθροίσματος. Έτσι, βρίσκουμε

$$-\frac{3}{2\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\Omega' = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^1 \sum_{q=e,o} \left[ s_{1,in}^{m/q} r^l + S_1^{m/q}(r) + s_{1,ex}^{m/q} r^{-(l+1)} \right] Y_1^{m/q}(\zeta, \varphi), \quad (36)$$

όπου τα  $S_1^{m/q}$ ,  $s_{1,in}^{m/q}$ ,  $s_{1,ex}^{m/q}$  καθορίζονται βάσει της σχέσης

$$-\frac{3}{2\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\Omega' = -\frac{3}{2\pi} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{\alpha}^{r_0-\epsilon} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{r_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-r_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' \right\}, \quad (37)$$

άρα

$$\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^1 \sum_{q=e,o} \left\{ \left[ (s_{1,ex}^{m/q} + S_1^{m/q}) r^{-(l+1)} + s_{1,in}^{m/q} r^l + S_1^{m/q}(r) \right] Y_1^{m/q}(\zeta, \varphi) \right\}. \quad (38)$$

#### F. Επαλήθευση των αποτελεσμάτων

Τελευταίο μέρος της εργασίας είναι ο έλεγχος της ορθότητας των υπολογισμών μας. Η σφαίρα είναι οριακή περίπτωση (όταν η ημισφαιρική απόσταση τείνει στο 0) του σφαιροειδούς. Επομένως, παίρνουμε τα αποτελέσματα της σφαιροειδούς περίπτωσης από προηγούμενη μελέτη (Vafeas, 2018) και μέσω του εκφυλισμού τους προκύπτουν τα αποτελέσματα της σφαίρας που βρήκαμε.

#### IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έχουμε λάβει τα αποτελέσματα των σκεδαζόμενων πεδίων στην περίπτωση εντοπισμού μίας μεταλλικής σφαίρας στο κενό. Μαζί με τις μελέτες δύο σφαιρών που σχεδόν αγγίζονται (Vafeas, Lesselier & Kariotou, 2015), ενός τοροειδούς (Vafeas, 2016), ενός ελλειψοειδούς (Vafeas, 2020) και ενός σφαιροειδούς (Vafeas, 2018) όλες σε μη αγωγίμα περιβάλλοντα, κλείνει μία ομάδα επιλύσεων ευθέων προβλημάτων σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για τον εντοπισμό μεταλλικού αντικειμένου σε ένα μέσο

χωρίς απώλειες. Στόχος μας ήταν μία μικρή συμβολή στην ομάδα αυτή για μία ακριβέστερη πιθανή αντιστροφή.

#### ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κο. Παναγιώτη Βαφέα για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το τόσο ενδιαφέρον θέμα, τη λεπτομερή και υποστηρικτική καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, τη συνεχή ανταπόκρισή του σε όλες μου τις απορίες και την ενθάρρυνσή του σε αυτή μου την προσπάθεια. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τη συνεπιβλέπουσα καθηγήτριά μου κα. Φωτεινή Καραιώτου για την καθοριστική συμβολή της στην εργασία αυτή και τις πολύτιμες συμβουλές της κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

#### ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Ammari, H., Garnier, J., Jing, W., Kang, H., Lim, M., Solna, K. & Wang, H. (2013). *Mathematical and Statistical Methods for Multistatic Imaging*. Lecture Note in Mathematics (vol. 2098). Switzerland: Springer-Verlag.
- Ammari, H. & Kang, H. (2007). Polarization and Moments Tensors: with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory. *Applied Mathematical Sciences Series (vol. 2098)*. New York: Springer-Verlag.
- Dassios, G. & Kleinman, R.E. (2000). *Low Frequency Scattering*. Oxford: Oxford University Press.
- Hobson, E.W. (1965). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Mie, G. (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annals of Physics*, 330, 377–445.
- Moon, P. & Spencer, E. (1971). *Field Theory Handbook*. Berlin: Springer-Verlag.
- Morse P.M. & Feshbach H. (1953). *Methods of Theoretical Physics, Volumes I and II*. New York: McGraw-Hill.
- Perrusson, G., Vafeas, P., Chatjigeorgiou I.K. & Lesselier, D. (2015). Low-frequency on-site identification of a highly conductive body buried in Earth from a model ellipsoid. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 80, 963–980.
- Perrusson, G., Vafeas, P. & Lesselier, D. (2010). Low-frequency dipolar excitation of a perfectly ellipsoidal conductor. *Quarterly of Applied Mathematics*, 68, 513–536.
- Stratton, J.A. (1941). *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Vafeas, P., Lesselier, D. & Kariotou, F. (2015). Estimates for the low frequency electromagnetic fields scattered by two adjacent metal spheres in a lossless medium. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38, 4210–4237.
- Vafeas, P., Papadopoulos, P.K., Ding, P.-P. & Lesselier, D. (2016). Mathematical and numerical analysis of low-frequency scattering from a PEC ring torus in a conductive medium, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 6477–6500
- Vafeas, P., Papadopoulos, P.K. & Lesselier, D. (2012). Electromagnetic low-frequency dipolar excitation of two metal spheres in a conductive medium. *Journal of Applied Mathematics*, ID 628261, 1–37.
- Vafeas, P., Perrusson, G. & Lesselier, D. (2009). Low-frequency scattering from perfectly conductive medium with magnetic dipole excitation. *International Journal of Engineering Science*, 47, 372–390.
- Vafeas, P., Perrusson, G. & Lesselier, D. (2004). Low-frequency solution for a perfectly conductive medium with dipolar excitation. *Progress in Electromagnetics Research*, 49, 87–111.
- Vafeas, P. (2018). Dipolar Excitation of a Perfectly Electrically Conducting Spheroid in a Lossless Medium at the Low-Frequency Regime. *Advances in Mathematical Physics*, ID 9587972, 1–20.
- Vafeas, P. (2020). Low-Frequency dipolar electromagnetic scattering by a solid ellipsoid in lossless environment. *Studies in Applied Mathematics*, 217–246.
- Vafeas, P. (2017). Revisiting the Low-Frequency Dipolar Perturbation by an Inpenetrable Ellipsoid in a Conductive Surrounding. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 9420658, 1–16.
- Vafeas, P. (2016). Low-frequency electromagnetic scattering by a metal torus in a lossless medium with magnetic dipolar illumination. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 4268–4292.