

# Μέση Καμπυλότητα και Σολιτόνια: Συσχέτιση με Ελαχιστικές Επιφάνειες

Γιακουμάκης Κωνσταντίνος  
Μεταπτυχιακός φοιτητής ΜΣΜ/ΣΘΕΤ

ΕΑΠ

Αρβανιτογεώργιος Ανδρέας  
Καθηγητής, Μέλος ΣΕΠ

ΕΑΠ

**Περίληψη** - Η παρούσα διπλωματική εργασία αναλύει τις βασικές έννοιες και τις ιδιότητες των καμπύλων και των επιφανειών. Αρχικά, θα γίνει εισαγωγή στην έννοια των καμπύλων και θα εξεταστούν κάποιοι βασικοί όροι, όπως η παραμέτρηση ως προς το μήκος τόξου, η καμπυλότητα και το τριέδρο Frenet. Στη συνέχεια, όσον αφορά τις επιφάνειες θα αναλυθούν οι ορισμοί και οι ιδιότητες των επιφανειών, το εφαπτόμενο επίπεδο, η απεικόνιση Gauss και η μέση καμπυλότητα. Έπειτα, θα αναφερθεί η εξίσωσή του σολιτονίου, ενώ θα εξεταστούν οι ειδικές περιπτώσεις λύσεων αυτής θέτοντας συγκεκριμένες γεωμετρικές συνθήκες, αλλά και θεωρώντας λύση της μορφής χωριζομένων μεταβλητών.

**Λέξεις-Κλειδιά:** Σολιτόνιο, Διαφορική Γεωμετρία, Καμπυλότητα, Διαφορική Εξίσωση, Επιφάνεια Ελάχιστης Έκτασης, Ευθειογενής Επιφάνεια, Επιφάνεια εκ περιστροφής, Χωριζομένων Μεταβλητών, Χωροχρόνος Minkowski

## Εισαγωγή

Στη διαφορική γεωμετρία το μεταφορικό σολιτόνιο είναι μία ειδική λύση της εξίσωσης μέσης καμπυλότητας ροής με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μίας ευθείας χωρίς να αλλάζει το σχήμα της. Η μελέτη εξίσωσης σολιτονίου στον Ευκλείδειο χώρο είναι μία γενίκευση της μελέτης ελαχιστικών επιφανειών, όπου η μέση καμπυλότητα ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της απεικόνισης Gauss με την ταχύτητα της καμπύλης. Στην ειδική περίπτωση που το σολιτόνιο μας είναι μία ελαχιστική επιφάνεια, η ταχύτητα της καμπύλης ισούται με μηδέν.

Η μελέτη των μεταφορικών σολιτονίων έχει σημαντικό ενδιαφέρον, διότι αποτελεί μία γεωμετρική μετατόπιση του κύματος κατά τη διάρκεια του χρόνου, όπου μία επιφάνεια κινείται με ταχύτητα ανάλογη της μέσης καμπυλότητάς της, όπως η διάχυση της θερμότητας. Επίσης, λαμβάνονται σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά της ροής σε γενικές συνθήκες. Έτσι, μπορούμε να παρατηρήσουμε συμπεριφορές και μοτίβα των επιφανειών που βοηθούν στην κατανόηση των σολιτονίων. Παράδειγμα αποτελεί η μοναδικότητα ή οι αυτοτομές των επιφανειών (singularities) ανάλογα με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής είναι μία γενίκευση των ελαχιστικών επιφανειών με εφαρμογές στη φυσική, όπως στην μελέτη του προβλήματος του J. Plateau των σαπουνόφουσκων, οι οποίες σχηματίζουν επιφάνεια ελάχιστης έκτασης λόγω της επιφανειακής τάσης της ατμόσφαιρας, η οποία αποδεικνύει την ύπαρξη τέτοιων επιφανειών.

## Μεθοδολογία

A. Μεταφορικό σολιτόνιο και διαφορική εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής

Έστω η επιφάνεια  $M$ , η οποία είναι της μορφής:  $z = u(x, y)$ . Μία παραμετρικοποίηση αυτής είναι:  $X$

$$(x, y) = (x, y, z) = (x, y, u(x, y)), \text{ με } X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Αναλύοντας την εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής  $H(p) = \langle N(p), \vec{v} \rangle (1)$ , υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος με το διάνυσμα της ταχύτητας ροής

$$\langle N(p), \vec{v} \rangle = \langle \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} (-u_x, -u_y, 1), (v_1, v_2, v_3) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle N(p), \vec{v} \rangle = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3)$$

Εξισώνοντας την παραπάνω σχέση με τη μέση καμπυλότητα προκύπτει:

$$\frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + u_y^2) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2) \cdot u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$(1 + u_y^2) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2) \cdot u_{yy} = 2 (u_x^2 + u_y^2 + 1) \cdot (-u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3) \quad (2)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, σχεδόν γραμμική, για γνωστό:  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  και η επιλυσιμότητά της δεν είναι βέβαιη. Μεταφορικό σολιτόνιο είναι η κάθε λύση  $u(x, y)$  που ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση, είτε σε αυτή τη μορφή, είτε στην αρχική της.

B. Ειδικές λύσεις συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών συνθήκες.

Επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου: Θεωρούμε ότι η επιφάνειά μας είναι γενικευμένος κύλινδρος της μορφής  $X(t, s) = \gamma(s) + t \cdot \vec{a}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , όπου  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , επίπεδη καμπύλη, κάθετη στο σταθερό διάνυσμα  $\vec{v}$ . Θεωρούμε ότι η  $\gamma$  είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου, έτσι ώστε:  $\gamma'(s) \times \vec{n}(s) = \vec{a}$ , όπου  $\vec{n}$ , το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη  $\gamma$ .

Επιφάνεια εκ περιστροφής: Θεωρούμε τη γεωμετρική συνθήκη ότι η επιφάνειά μας είναι μία επιφάνεια εκ περιστροφής, δηλαδή της μορφής  $X(x, y) = (f(x) \cdot \cos y, f(x) \cdot \sin y, z(x))$ . Στην περίπτωση που έχουμε  $f(x) = x$ , το πρόβλημά μας γίνεται:

$$\ddot{z}(x) + \frac{\dot{z}(x) \cdot (1 + \dot{z}^2(x))}{x} = 1 + \dot{z}^2(x) \Leftrightarrow \frac{\ddot{z}(x) \cdot x}{(1 + \dot{z}^2(x))^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{z}(x)}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}} \Leftrightarrow \left( \frac{x \cdot \dot{z}(x)}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}} \right)' = \frac{x}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}}$$

Για την παραπάνω εξίσωση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις αρχικές συνθήκες  $z(0) = 0$  και  $z'(0) = 0$ , ώστε να έχουμε αυτοτομή (singularity) στο σημείο  $x = 0$ . Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη λύσης της παραπάνω εξίσωσης υπάρχει και επίσης αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει κλειστό σολιτόνιο μεταφοράς. Επίσης, με ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα  $(0, x)$ :

$$\frac{u'(r)}{\sqrt{1 + u'(r)^2}} = \frac{1}{r} \cdot \int_0^r \frac{t}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} dt$$

Για  $r \rightarrow 0$  σύμφωνα με τον κανόνα L' Hospital, έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'(r)}{\sqrt{1 + u'(r)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + u'(t)^2}}$$

Επομένως, πρέπει:  $\lim_{r \rightarrow 0} u'(r) = 0$ .

Οπότε δείξαμε ότι κάθε λύση της παραπάνω εξίσωσης που τέμνει τον άξονα περιστροφής πρέπει να το κάνει κάθετα. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , μία επίπεδη καμπύλη που ανήκει στο  $x$ - $y$  επίπεδο, η οποία είναι γεννήτορας καμπύλη της επιφάνειας εκ περιστροφής γύρω από τον  $z$  άξονα. Παρακάτω θα αναλυθούν οι δύο πιθανές εκδοχές.

- Η καμπύλη  $\gamma$  τέμνει κάθετα τον άξονα  $z$ , τότε η  $\gamma$  είναι μία κοίλη συμμετρική απεικόνιση μίας συνάρτησης  $f$  ορισμένη σε ένα φραγμένο διάστημα του  $x$  άξονα με μόνο μία μέγιστη τιμή στο σημείο τομής με τον  $z$  άξονα. Η καμπύλη  $\gamma$  τέμνει τον  $x$  άξονα σε δύο σημεία.

- Η καμπύλη  $\gamma$  δεν τέμνει κάθετα τον άξονα  $z$  και απεικονίζεται ως φτερωτό σχήμα. Η καμπύλη  $\gamma$  τέμνει τον  $x$  άξονα σε δύο σημεία.

Γ. i) Σολιτόνια τύπου μεταφοράς: Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x, y) = f(x) + g(y),$$

οπότε η εξίσωση θα πάρει τη μορφή:

$$(1 + g'^2) \cdot f'' + (1 + f'^2) g'' = 2 \cdot (1 + f'^2 + g'^2) \cdot (-v_1 \cdot f' - v_2 \cdot g' + v_3)$$

ii) Σολιτόνια ομοθετικού τύπου: Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Για να είναι η  $u(x, y)$ , σολιτονιακή λύση η εξίσωση γίνεται:

$$(1 + f^2 g'^2) g f'' - 2 f g f'^2 g'^2 + (1 + g^2 f'^2) f g'' - 2(1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2)(-v_1 f' g - v_2 f g' + v_3) = 0$$

Δ. Επέκταση αποτελεσμάτων στο χώρο Lorentz – Minkowski

Αν θεωρήσουμε δύο χωρικές διαστάσεις και μία χρονική θα έχουμε τον χώρο Lorentz – Minkowski:  $\mathbb{R}_1^3$ , μαζί με την κανονική Lorentzian μετρική:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2$$

Και επιπλέον ορίζουμε αντίστοιχα το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο ως  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και  $\times$ . Στον χώρο  $\mathbb{R}_1^3$  ορίζουμε τρία είδη διανυσμάτων  $\vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$  και τρεις κατηγορίες:

Χωροειδές, εάν  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle > 0$ ,

Χρονοειδές, εάν  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle < 0$  και

Φωτοειδές, εάν  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$

Για μία επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου στο χώρο Lorentz – Minkowski:  $X(t, s) = a(s) + t \cdot \vec{w}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  και  $a: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $a(s)$  είναι παραμετρικοποιημένη συνάρτηση ως προς το μήκος τόξου και  $\vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$ . Όμοια με τον Ευκλείδειο χώρο το κάθετο διάνυσμα  $N$  της επιφάνειας είναι παράλληλο στο διάνυσμα:  $a'(s) \times w$  και η εξίσωση γίνεται:

$$\langle w, w \rangle \cdot \langle a' \times n, a'' \rangle = 2 \cdot \langle a'(s) \times w, a'(s) \times w \rangle \cdot \langle a'(s), a'(s) \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle a'(s), w \rangle^2 \cdot \langle a'(s) \times w, \vec{v} \rangle$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση σολιτονίου στην περίπτωση όπου:  $\langle a'(s) \times w, \vec{v} \rangle = 0$ , δηλαδή όταν  $\vec{v}$  είναι παράλληλο στο  $w$ .

Ε. Επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου στον χώρο  $\mathbb{R}_1^3$

Για μία επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου στο χώρο Lorentz – Minkowski:  $X(t, s) = a(s) + t \cdot \vec{w}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  και  $a: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $a(s)$  είναι παραμετρικοποιημένη συνάρτηση ως προς το μήκος τόξου και  $\vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$ . Όμοια με τον Ευκλείδειο χώρο το κάθετο

διάνυσμα  $N$  της επιφάνειας είναι παράλληλο στο διάνυσμα:  $a'(s) \times w$  και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle \cdot \langle a' \times n, a'' \rangle \\ = 2 \cdot \langle a'(s) \times w, a'(s) \times w \rangle \\ \cdot \langle a'(s), a'(s) \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle a'(s), w \rangle^2 \\ \cdot \langle a'(s) \times w, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση σολιτονίου στην περίπτωση όπου:  
 $\langle a'(s) \times w, \vec{v} \rangle = 0$ , δηλαδή όταν  $\vec{v}$  είναι παράλληλο στο  $w$ .

ΣΤ. i) Μεταφορικά σολιτόνια στον Lorentz – Minkowski χώρο

Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο που είναι άθροισμα δύο καμπυλών, όπου η μία είναι επίπεδη, είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

ΣΤ. ii) Σολιτόνια ομοθετικού τύπου στον Lorentz – Minkowski χώρο

Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο ομοθετικού τύπου, όπου  $\vec{v}$  είναι διάνυσμα ορθοκανονικής βάσης είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

### Επιλεγμένα Αποτελέσματα

A. Η εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής (1) αποτελεί μία γενίκευση των ελαχιστικών επιφανειών, η οποία ανάγεται στην εξίσωση σολιτονίου (2). Αναζητώντας ειδικές λύσεις συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών και θεωρώντας ότι η επιφάνειά μας είναι επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου καταλήγουμε σε τρεις περιπτώσεις.

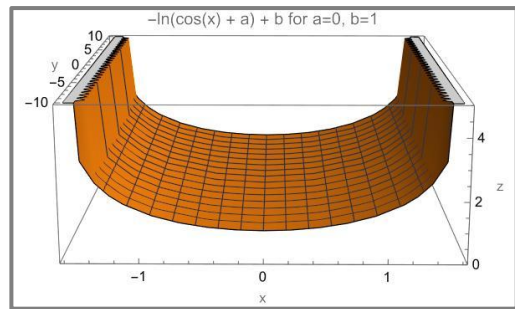
- I. Αν η ταχύτητα ροής  $\vec{v}$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a}$ , τότε  $\langle n(s), \vec{v} \rangle = 0$ , για κάθε  $s \in I$ , οπότε η  $\gamma$  είναι ευθεία γραμμή και η  $M$  είναι ένα επίπεδο.
- II. Αν η ταχύτητα ροής  $\vec{v}$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{a}$ . Εκφράζουμε τη  $\gamma$  ως συνάρτηση επιπέδου:  $y = u(x)$ . Δηλαδή η συνάρτηση  $u$  είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής  $y$ , οπότε όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς  $y$  θα μηδενίζονται. Αντικαθιστώ στη διαφορική μου εξίσωση:

$$\begin{aligned} (1 + u_x^2) \cdot u_{yy} - 2u_x \cdot u_y \cdot \\ u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 2 \cdot (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} \\ u_{xx} = 1 + u_x^2 \end{aligned}$$

Η παραπάνω είναι συνήθης διαφορική εξίσωση με άγνωστο το  $x$  και η λύση της είναι

$$u(x) = -\log \cos(x + c) + a$$

Όπου  $c, a$ : σταθερές. Η παραπάνω λύση της κυλινδρικής επιφάνειας καλείται μονόνιο μεταφοράς.



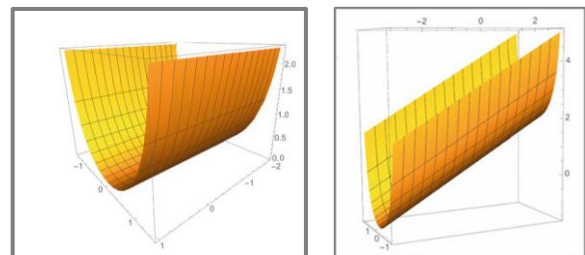
Σχήμα 1. Απεικονίζεται η γραφική παράσταση του μονονίου μεταφοράς.

- III. Έστω  $\vec{v}$  διάνυσμα όχι κάθετο στους γεννήτορες σχηματίζει γωνία  $\theta$  με αυτούς, με  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ . Τότε αντίστοιχα καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$u_{xx} = (1 + u_x^2) \cdot \cos \theta$$

Η οποία έχει λύση:  $u(x) = -\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \log(\cos(\cos \theta \cdot x)) + \tan \theta \cdot x + \alpha$

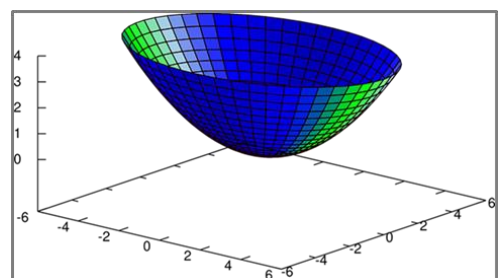
Το οποίο είναι ένα γενικευμένο μονόνιο μεταφοράς.



Σχήμα 2. Απεικονίζεται ένα μονόνιο μεταφοράς. Το αριστερό είναι για γωνία  $\theta = 0$  και δεξιά φαίνεται για γωνία  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

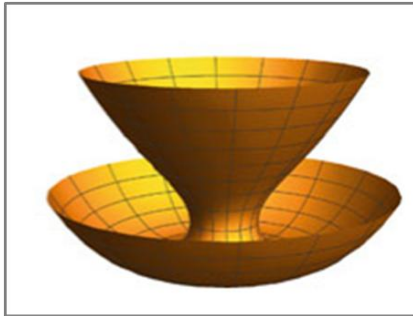
B. Αναζητώντας ειδικές λύσεις συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών και θεωρώντας ότι η επιφάνειά μας είναι επιφάνεια εκ περιστροφής.

- I. Η επιφάνεια της σολιτονιακής μας λύσης θα έχει κοίλο σχήμα, όταν η επιφάνεια έχει αυτοτομές (singularity).



Σχήμα 3. Απεικονίζεται η σολιτονιακή λύση bowl solution.

- II. Η επιφάνεια της σολιτονιακής μας λύσης θα έχει φτερωτό σχήμα, όταν η επιφάνεια δεν έχει αυτοτομές.



Σχήμα 4. Απεικονίζεται η σολιτονιακή λύση winglike shape.

Γ. I) Τα μόνα σολιτόνια μεταφοράς που είναι άθροισμα δύο επίπεδων καμπυλών είναι είτε επίπεδα, είτε μονόνια μεταφοράς.

II) Σαν γενίκευση ισχύει το ίδιο με μία λιγότερη συνθήκη. Τα μόνα σολιτόνια μεταφοράς που είναι άθροισμα δύο καμπυλών, όπου η μία καμπύλη είναι επίπεδη, είναι είτε επίπεδα, είτε μονόνια μεταφοράς.

Δ. Τα μόνα σολιτόνια ομοθετικού τύπου όπου η ταχύτητα ροής  $\vec{v}$  είναι διάνυσμα ορθοκανονικής βάσης είναι ένα μονόνιο μεταφοράς.

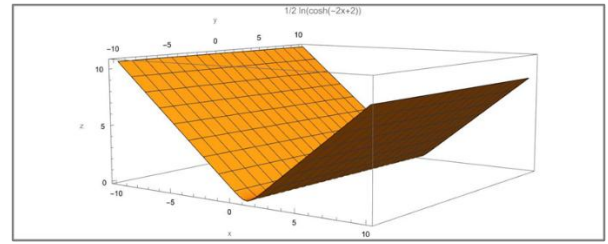
Ε. I) Έστω ότι οι γεννήτορες του γενικευμένου κυλίνδρου είναι χωρικές και έστω ότι  $\vec{w} = (1, 0, 0)$ . Αν η επιφάνειά μου είναι της μορφής:  $X(s, t) = (0, s, u(s)) + t \cdot \vec{w}$ , τότε η εξίσωση σολιτονίου στο Lorentz – Minkowski χώρο γίνεται:

$$u'' = \pm 2 \cdot (1 - u'^2) \cdot (v_2 \cdot u' - v_3), \quad \pm (1 - u'^2) > 0$$

Για την περίπτωση όπου  $\vec{v} = (0, 0, 1)$ , η λύση της διαφορικής εξίσωσης με διπλή ολοκλήρωση είναι:

$$u(s) = \mp \frac{1}{2} \ln(\cosh(-2 \cdot s + \alpha)) + \beta, \quad \pm (1 - u'^2) > 0,$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  που είναι ένα χωροειδές μονόνιο μεταφοράς στο Lorentz – Minkowski χώρο.



Σχήμα 5. Απεικονίζεται η γραφική παράσταση μονόνιου μεταφοράς στο χώρο Lorentz – Minkowski για σταθερές  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ .

II) Έστω ότι οι γεννήτορες του γενικευμένου κυλίνδρου είναι χρονικές και έστω ότι  $\vec{w} = (0, 0, 1)$ . Τότε  $X(s, t) = (s, u(s, 0)) + t \cdot \vec{w}$  και η εξίσωση σολιτονίου στο χώρο Lorentz – Minkowski γίνεται:

$$u'' = 2 \cdot (1 + u'^2) \cdot (v_1 \cdot u' - v_2)$$

Και για  $v = (0, 1, 0)$  προκύπτει:  $u(s) = \frac{1}{2} \ln(\cos(2s + a)) + \beta$  που είναι ένα χρονοειδές μονόνιο μεταφοράς στο Lorentz – Minkowski χώρο, το οποίο θυμίζει μονόνιο μεταφοράς στον Ευκλείδειο χώρο.

III) Για τις επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου που οι γεννήτορές του παράγονται από διανύσματα  $\vec{w}$  που είναι φωτοειδή, δηλαδή ως προς τη μετρική Lorentz – Minkowski ισχύει ότι  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$ . Στην περίπτωσή μας παίρνουμε:  $H = 0$ , δηλαδή μία ελαχιστική επιφάνεια στον Lorentz – Minkowski χώρο.

ΣΤ. I) Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο που είναι άθροισμα δύο καμπυλών, όπου η μία είναι επίπεδη, είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

II) Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο ομοθετικού τύπου, όπου  $\vec{v}$  είναι διάνυσμα ορθοκανονικής βάσης είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

### Συμπεράσματα

Για την εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής, όπου αναγάγαμε στην εξίσωση σολιτονίου αναζητήσαμε λύσεις, είτε συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών, είτε λύσεις χωριζομένων μεταβλητών. Ο λόγος είναι ότι δεν μπορούσαμε να αναζητήσουμε γενική λύση αυτής, διότι η επιλυσιμότητά της δεν είναι βέβαιη.

Η παρούσα περίληψη βασίστηκε στη Διπλωματική εργασία του Γ.Κ. που εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος ΜΣΜ του ΕΑΠ.

### ***Ευχαριστίες***

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών και επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας για τη πολύτιμη βοήθεια και το ενδιαφέρον που επέδειξε στην παρούσα εργασία.

### ***Αναφορές***

1. Andrew Pressley, (2016), «Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία», Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
2. Aydin, M. E., & Lopez, R. (2022). Translating solitons of translation and homothetical types. Turkish Journal of Mathematics, 46(8), 3245-3259.
3. Hoffmann, T., Kilian, M., Leschke, K., & Martin, F. (2021). Minimal Surfaces: Integrable Systems and Visualisation. Springer International Publishing.
4. López, R. (2016). Separation of variables in equations of mean-curvature type. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 146(5), 1017-1035.
5. López, R. (2018). Invariant singular minimal surfaces. Annals of Global Analysis and Geometry, 53(4), 521-541.
6. Παπαντωνίου Β., « Διαφορική Γεωμετρία», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών