

Μια νέα προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης της Weibull

Χρήστος Γ. Παπαδόπουλος
Μεταπτυχιακός Φοιτητής ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
std150397@ac.eap.gr,
papadopoulos.cg@gmail.com

Κωνσταντίνος Πολίτης
Αναπληρωτής Καθηγητής και Μέλος ΣΘΕΤ ΕΑΠ
politis.konstantinos@ac.eap.gr,
kpolitis@webmail.unipi.gr

Περίληψη – Στη παρακάτω δημοσίευση παρουσιάζονται κάποιες από τις καλύτερες προσεγγίσεις της ανανεωτικής συνάρτησης της Weibull και προτείνεται μια νέα η οποία δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα.

Λέξεις-Κλειδιά: Ανανεωτική συνάρτηση, ανανεωτική θεωρία

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν $\{X_1, X_2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητες μη-μηδενικές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παριστάνουν τους ενδιάμεσους χρόνους και ακολουθούν την ίδια κατανομή τότε η απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ανέλιξη. Έτσι, μια ανανεωτική ανέλιξη είναι μια διαδικασία μέτρησης τέτοια ώστε ο χρόνος μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός έχει μια κατανομή F , ο χρόνος μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου γεγονότος έχει (ανεξάρτητα από τον χρόνο του πρώτου γεγονότος), την ίδια κατανομή F κ.ο.κ. Όταν συμβαίνει ένα τέτοιο γεγονός, λέμε ότι έγινε ανανέωση.

Η ανανεωτική συνάρτηση δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό γεγονότων στο διάστημα $(0, t]$ και ορίζεται ως:

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

όπου F_n είναι η n -οστή συνέλιξη της F με τον εαυτό της. Ακόμα, ισχύει ότι (Kao, 1997), (Campbell, 2018):

$$\begin{aligned} M(t) &= F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t M(t-x) f(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Στη παρούσα δημοσίευση θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τη περίπτωση όπου η σ.π.π. ακολουθεί τη κατανομή Weibull. Η συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής της θα είναι:

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad \alpha, \beta > 0$$

όπου α είναι η παράμετρος μορφής (shape parameter) και β η παράμετρος κλίμακας (scale parameter) (Ross, 2014).

A. Εφαρμογές ανανεωτικής συνάρτησης

Η κατανομή Weibull χρησιμοποιείται κυρίως ως κατανομή διάρκειας ζωής κατασκευασμένων προϊόντων, συμπεριλαμβανομένων των σωλήνων κενού, των ρουλεμάν και της ηλεκτρικής μόνωσης. Επιπρόσθετα, βρίσκει εφαρμογή σε βιοϊατρικά πεδία, όπως η μοντελοποίηση του χρόνου μέχρι την εμφάνιση όγκου

(Yannaros, 1994). Επιπλέον, είναι κατάλληλο μοντέλο για δεδομένα ακραίων τιμών, όπως η αντοχή ορισμένων υλικών. Τέλος άλλες εφαρμογές της, είναι η ανάλυση και μοντελοποίηση της αξιοπιστίας, η πολιτική συντήρησης, η πολιτική εγγύησης προϊόντων, η εφοδιαστική αλυσίδα, η θεωρία ουρών κ.α. (Jiang, 2019).

B. Βαριές ουρές και υπολογισμοί

Μια πολύ διαδεδομένη μέθοδος για τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης είναι με τη χρήση μετασχηματισμού Laplace. Όταν η συνάρτηση κατανομής είναι phase-type, η λύση είναι κλειστής μορφής και μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία. Τέτοιες κατανομές είναι η εκθετική, η συνέλιξη και μίξη εκθετικών, Γάμμα κτλ. Όμως αυτή η μέθοδος δεν επιδέχεται λύση σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση κατανομής ακολουθεί κατανομή με βαριά ουρά. Οι κατανομές αυτές έχουν αρκετά αργή σύγκλιση με πιο γνωστές τις Weibull ($\alpha \geq 1$), Pareto, Lognormal κτλ. Οι Constantine & Robinson (1997) υπολογίζουν την ανανεωτική συνάρτηση με δυναμοσειρές, οι Cui & Xie (2003) με σειρές και χρήση συνάρτησης φ και τέλος ο Xie (1989) με τον αλγόριθμο Riemann-Stieltjes (RS). Τα αποτελέσματα της τελευταίας είναι αρκετά ακριβής και θα χρησιμοποιηθούν ως τα “πραγματικά”.

II. ΟΙ ΚΑΛΥΤΕΡΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τέσσερις από τις καλύτερες προσεγγίσεις της ανανεωτικής συνάρτησης και στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε τη νέα προσέγγιση.

A. Η προσέγγιση του Campbell (2010)

Σε αυτή τη δημοσίευση συμπεριλαμβάνουμε τη 10^η προσέγγιση Campbell (2010) λόγω της ιδιαίτερης μορφής που παίρνει σε μικρούς χρόνους. Ο τύπος της προσέγγισης είναι ο παρακάτω:

$$M_c(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x) \cdot \left[1 + F\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] \cdot f(x) dx$$

B. Η προσέγγιση της Deligonul (1985)

Με χρήση της σχέσης (1) μπορούμε να μετασχηματίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση ως

$$M(t) = \lambda t - F_c(t) + \int_0^t [1 - F_c(t-x)] dM(x) \quad (2)$$

με $F_c(t) = \lambda \int_0^t [1 - F(u)] du$, $\lambda = 1/\mu$ και μ η μέση τιμή. Επειδή η ανανεωτική συνάρτηση ικανοποιεί την (1) θα ικανοποιεί και την:

$$F(x) = \int_0^u m(x-t)[1-F(t)] dt \quad (3)$$

Δεδομένου ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι η παράγωγος της ανανεωτικής συνάρτησης της (3) και με απλές πράξεις καταλήγουμε ότι η προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$M_{DE}(t) = \lambda t - F_c(t) + \int_0^t (1 - F_c(t-x))(f(x) + \lambda \frac{F^2(x)}{F_c(x)}) dx$$

C. Η προσέγγιση του Jiang (2019)

Ο Jiang (2019) στη δημοσίευσή του προτείνει μια νέα προσέγγιση για την κατανομή Weibull με δύο κλάδους:

$$M_J(t) = \begin{cases} M_1(t), & t < t_s \\ M_2(t), & t \geq t_s \end{cases}$$

Ορίζουμε ως:

$$M_1(t) = \frac{\Lambda(t)}{1 + a\Lambda(t)}, \quad a \geq 0$$

Όπου η παράμετρος a θα οριστεί πιο κάτω.

Για μικρά t ισχύει ότι $1 + a\Lambda(s) \approx 1$ άρα $M_1(t) \approx \Lambda(t)$ (ικανοποιείται δηλαδή η πρώτη προϋπόθεση). Επίσης για μεγάλα t ορίζουμε την ασυμπτωτική ανανεωτική συνάρτηση (Jiang, 2019)

$$M_2(t) = M_\infty(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}(1 - c_v^2)$$

Για να βρούμε το t_s ορίζουμε την παρακάτω νέα συνάρτηση:

$$d(t) = \frac{\Lambda(t)}{\sqrt{\mu \lambda(t)}} - \frac{t}{\mu} + \frac{1}{2}(1 - c_v^2)$$

Λύνουμε την εξίσωση $d(t) = 0$ και το σημείο αλλαγής t_s είναι η θέση ελαχίστου της συνάρτησης d .

Τέλος αφού βρεθεί το t_s μπορούμε να υπολογίσουμε και το a από τη παρακάτω σχέση

$$a = \frac{1}{\frac{t_s}{\mu} - \frac{1}{2}(1 - c_v^2)} - \frac{1}{\Lambda(t_s)}$$

Αυτή η προσέγγιση πρέπει να ικανοποιεί και τις εξής προϋποθέσεις: α) ασυμπτωτικά να ισχύει $M(t) \approx \Lambda(s)$, β) στο $t = t_s$ πρέπει να είναι συνεχής γ) να είναι παραγωγίσιμη στο t_s .

Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις τότε η M_J είναι μια συνεχής και ομαλή συνάρτηση ως προς t και αναμένεται να είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης.

D. Η Προσέγγιση των Cui & Xie (2003)

Το 2003 στη δημοσίευσή τους οι Cui & Xie θεμελίωσαν μια προσέγγιση για την ανανεωτική συνάρτηση της κατανομής Weibull, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου κλίμακας β (δηλαδή $\beta \geq 3$). Αυτή είναι:

$$M_{CX}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

όπου Φ η τυποποιημένη κανονική κατανομή για την οποία ισχύει:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ και } \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(x) dx$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής δεν είναι σε κλειστή μορφή οπότε χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις και γι' αυτές τις συναρτήσεις. Οι Cui & Xie (2003) αναφέρουν τρεις

προσεγγίσεις γι' αυτή τη συνάρτηση και εμείς χρησιμοποιούμε αυτή του Bagby:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{30} \left(7e^{-\frac{x^2}{2}} + 16e^{-x^2(2-\sqrt{2})} + \left(7 + \frac{\pi}{4} x^2 \right) e^{-x^2} \right)}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{30} \left(7e^{-\frac{x^2}{2}} + 16e^{-x^2(2-\sqrt{2})} + \left(7 + \frac{\pi}{4} x^2 \right) e^{-x^2} \right)}, & x > 0 \end{cases}$$

Το απόλυτο σφάλμα εδώ είναι μικρότερο από $3 \cdot 10^{-3}$ αλλά το θετικό είναι πως δεν χρησιμοποιείται καθόλου η πυκνότητα $\phi(x)$ και οι υπολογισμοί είναι ευκολότεροι (Cui & Xie, 2003). Τέλος η προσέγγιση γίνεται:

$$M_{CX}(t) = n_1 - 1 + \sum_{n=n_1}^{n_1+k} \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

και επίσης

$$n_1 = \left\lceil \left(\frac{\sqrt{36\sigma^2 + 4\mu t} - 6\sigma}{2\mu} \right)^2 \right\rceil + 1, k = \left\lceil \left(\frac{\sqrt{36\sigma^2 + 4\mu t} + 6\sigma}{2\mu} \right)^2 \right\rceil - n_1$$

III. Η ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στη παρακάτω ενότητα θα παρουσιάσουμε μια νέα προσέγγιση της κατανομής Weibull έχοντας πάντα σταθερή τη παράμετρο μορφής $\alpha = 1$.

Οι Politis & Koutras (2006) έδειξαν ότι η ανανεωτική συνάρτηση έχει κάτω φράγμα τη συνάρτηση:

$$pol(t) = \frac{t}{\mu_1} + \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1^2} F(t) - 1$$

όπου έχουμε ότι:

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

είναι οι ροπές k τάξης (και προφανώς ισχύει ότι $\mu = \mu_1$). Επίσης η F είναι η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Weibull και η συνάρτηση $\bar{F}_e(t)$ ορίζεται ως (Losidis & Politis, 2022):

$$\bar{F}_e(t) = \frac{1}{\mu_1} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx = \frac{1}{\mu_1} \int_t^\infty 1 - F(x) dx$$

Συγκρίνοντας τις τιμές της pol από τις πραγματικές τιμές των Constantine & Robinson (1997) και υπολογίζοντας τα απόλυτα (και στη συνέχεια τα σχετικά) σφάλματα παρατηρήθηκε ένα μοτίβο, το οποίο για μεγάλες τιμές της παραμέτρου κλίμακας β απεικόνιζε την συνάρτηση $\eta\mu t/t$ με κατάλληλες μετατοπίσεις. Θέλουμε δηλαδή να προσθέσουμε έναν διορθωτικό όρο στο κάτω φράγμα έτσι ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την ιδιαίτερη μορφή της ανανεωτικής συνάρτησης της κατανομής Weibull. Αυτός ο όρος θα έχει μορφή:

$$pap(t) = A \cdot \frac{\eta\mu(k(t+c) \cdot \omega)}{|k \cdot t + c|^e} + q(t) \quad (4)$$

όπου $q(t) = B(k \cdot t + c) + d$ η ασυμπτωτική μορφή που θέλουμε να έχει για μεγάλα t (όπου η ανανεωτική συνάρτηση θα πάρει μορφή ευθείας).

Ξεκίνησαμε με την επιλογή του κατάλληλου συντελεστή της A παρατηρώντας ότι η τιμή έχει καλή εφαρμογή είναι το 20. Επίσης από τη γραφική παράσταση, κυρίως από το τρίτο διάγραμμα, όπου ακολουθείται η κατανομή Weibull με παραμέτρους $\beta = 9$ και $\alpha = 1$ παρατηρήθηκε πως η περίοδος της παραπάνω τριγωνομετρική συνάρτησης ήταν περίπου στο 9.5. Γνωρίζοντας ότι η περίοδος δίνεται από τον τύπο $T = 2\pi/\omega$ βρέθηκε με δοκιμές ότι για $\omega = 0.2075\pi$ θα είχαμε περίοδο $T = 9.6385$ που είναι μια αρκετά καλή τιμή για να περιγράψει αυτό που θέλουμε να κάνουμε. Στη συνέχεια επιλέγουμε ως τιμή $k = 10$ γιατί οι

τιμές των Constantine & Robinson (1997) τοποθετήθηκαν σε πίνακα 80 κελιών οι οποίες έπρεπε να συγκριθούν για $t = 0.1, 0.2, \dots, 8$ με τις τιμές της $pol(t)$, οπότε αναπροσαρμόσαμε την κλίμακα των αριθμών κατάλληλα. Η τελευταία παράμετρος που επιλέγεται "αυθαίρετα" είναι η $B = -0.0001$ όπου είναι η κλίση που θα έχει η ασυμπτωτική ευθεία. Έχοντας αυτές τις σταθερές τιμές ως βάση, ελέγξαμε για τις τιμές $2, 3, \dots, 10$ της παραμέτρου β της Weibull για ποιες τιμές των c, d, e δίνονται σφάλματα κάτω από 0.3%.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

ΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ c, d, e ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ $\beta = 2, 3, \dots, 10$

β	10	9	8	7	6	5	4	3	2
c	0.320	0.485	0.480	0.255	0.175	0.005	-0.65	-1.94	-5.06
d	0.495	0.492	0.492	0.488	0.484	0.475	0.462	0.434	0.364
e	1.42	1.50	1.60	1.70	1.85	2.00	2.40	2.80	3.40

Έγινε αναπαράσταση των τιμών αυτών με αποτέλεσμα τα σημεία των c, d να προσαρμόζονται σε υπερβολή και τα σημεία των e σε παραβολή. Με χρήση της εντολής *FindFit* βρέθηκαν ότι οι συναρτήσεις προσαρμογής ως προς της παράμετρο β της Weibull θα είναι οι εξής:

$$c(\beta) = -\frac{24.2537}{\beta^{2.05939}} + 0.727349$$

$$d(\beta) = -\frac{0.4659}{\beta^{1.744}} + 0.503486$$

$$e(\beta) = 0.0349675 \cdot \beta^2 - 0.647444 \cdot \beta + 4.47271$$

Έτσι η συνάρτηση (4) μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$rap(t) = 20 \cdot \frac{\eta\mu((10t + c(\beta)) \cdot 0.2075\pi)}{|10t + c(\beta)|^{e(\beta)}} - 0.0001(10t + c(\beta)) + d(\beta)$$

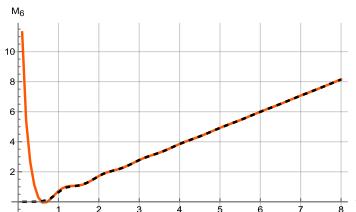
Όπου:

- $c(\beta)$ η οριζόντια μετατόπιση κατά c
- $d(\beta)$ η κατακόρυφη μετατόπιση κατά d
- $e(\beta)$ το εκθετικό του παρονομαστή

Οπότε με τη παραπάνω διόρθωση, η νέα προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης ορίζεται ως:

$$M_{CP1}(t) = pol(t) + rap(t)$$

Παρόλο όμως που η συνάρτηση είχε αρκετά καλή εφαρμογή για $t > 1$ όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 2, στο διάστημα $(0,1)$ υπήρχε αρκετά μεγάλη απόκλιση. Όπως θα παρατηρήσουμε από το ίδιο διάγραμμα, η Weibull $(1,9)$ για $t \in (0,1)$, παριστάνει μια σιγμοειδή συνάρτηση.



Διάγραμμα 2. Η ανανεωτική συνάρτηση CP_1 (πορτοκαλί) της Weibull ($a = 1, \beta = 6$) σε σύγκριση με τις τιμές του αλγορίθμου Xie (1989).

Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν για αυτό το λόγο την:

$$s(t) = \frac{a}{1 + e^{-b(t-1)}}$$

Θέλουμε να βρούμε τις παραμέτρους a και b έτσι ώστε να είναι συνεχής συνάρτηση στο $t = 1$. Έχουμε ότι $s(1) = a/2$ για οποιαδήποτε τιμή του b . Επειδή θέλουμε να

εξασφαλίσουμε τη συνέχεια θα ορίσουμε τη συνάρτηση ως:

$$M_{CP2}(t) = \begin{cases} M_{CP1}(1) \cdot s(t), & 0 \leq t < 1 \\ M_{CP1}(t), & t \geq 1 \end{cases}$$

Με αυτό τον τρόπο σε κάθε περίπτωση θα προκύπτει:

$$M_{CP1}(1) \cdot \frac{a}{2} = M_{CP1}$$

άρα σε κάθε περίπτωση ότι ισχύει $a = 2$.

Πλέον μένει να βρούμε τη κατάλληλη σταθερά b η οποία θα είναι μια συνάρτηση της παραμέτρου β της Weibull για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Επιλέγουμε για την $t = 0.5$ και λύνουμε το σύστημα

$$s(0.5) = Const(\beta, 0.5)$$

όπου $Const(\beta, t)$ είναι η τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης που υπολόγισαν οι Constantine & Robinson (1997) για τη κάθε τιμή της παραμέτρου β σε σχέση με το χρόνο t . Λύνοντας αυτά τα συστήματα προκύπτουν οι τιμές:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

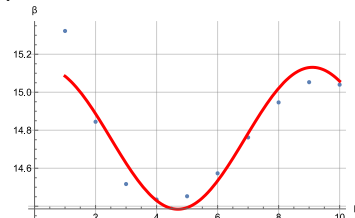
ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ b ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ $\beta = 1, 2, \dots, 10$

β	10	9	8	7	6
b	15.03980	15.05297	14.94648	14.76216	14.57324
β	5	4	3	2	1
b	14.45253	14.43536	14.51685	14.84451	15.32255

Οι τιμές αυτές αν αναπαρασταθούν σε μια γραφική παράσταση θα προκύψει μια συνάρτηση που θυμίζει ημιτονοειδή (ή συνημιτονοειδή). Με χρήση του λογισμικού Mathematica και της εντολής "NonlinearModelFit" προσαρμόζουμε μια ημιτονοειδή συνάρτηση η οποία προκύπτει ότι είναι η:

$$b(\beta) = 0.373368 \cdot \eta\mu(0.712781\beta + 1.36266) + 14.7577$$

η οποία παριστάνεται παρακάτω σε σύγκριση με τις τιμές του b που βρέθηκαν στον ΠΙΝΑΚΑ ΙΙ στο παρακάτω διάγραμμα 3:

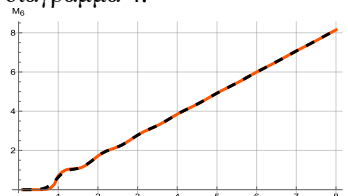


Διάγραμμα 3. Η γραφική παράσταση των σημείων β με τη νέα συνάρτηση $b(\beta)$

Με αυτό τον τρόπο πλέον η σιγμοειδής μας συνάρτηση θα έχει τύπο:

$$s(t) = \frac{2}{1 + e^{-b(\beta)(t-1)}}$$

Η νέα μορφή της συνάρτησης M_{CP2} φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 4:



Διάγραμμα 4. Η ανανεωτική συνάρτηση CP_1 (πορτοκαλί) της Weibull ($a = 1, \beta = 6$) σε σύγκριση με τις τιμές του αλγορίθμου Xie (1989).

Στη συνέχεια θα επιβεβαιώσουμε την ότι η προσέγγισή μας έχει διάρκεια και τα αποτελέσματά της είναι αρκετά

ακριβή. Εργαζόμαστε για $\beta = 6$ όπως και παραπάνω. Παρατηρούμε πως αν και στους χρόνους (1,2) καλύτερη είναι του Campbell με διαφορά αυτό γρήγορα αλλάζει. Από την $t = 2$ και μετά η προσέγγισή μας γίνεται καλύτερη μέχρι και το τέλος (δηλαδή την $t = 8$). Πετυχαίνουμε ακρίβεια κάτω από μηδέν 0.3% την ώρα που οι άλλες προσεγγίσεις θα ξεπεράσουν το 1% σε αρκετά σημεία. Από την $t = 4$ όπου και η συνάρτηση τείνει να γίνει ευθεία, τα σφάλματα είναι μικρά για όλες τις προσεγγίσεις με τα μικρότερα εξ αυτών να πετυχαίνονται από την CP2. Στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ III παρουσιάζονται ενδεικτικά τα σχετικά σφάλματα αυτών των προσεγγίσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ III

Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΙΑ $\beta = 6$

t	Campbell	Deligunul	Jiang	Cui&Xie	Pap
2.0	0.012491	0.005184	0.021781	0.006222	0.003049
2.2	0.022182	0.029503	0.033710	0.004987	0.000682
2.4	0.026872	0.000850	0.000559	0.024922	0.000856
2.6	0.016334	0.021358	0.021352	0.038384	0.001433
2.8	0.008107	0.008833	0.008833	0.018130	0.001138
3.0	0.031866	0.009462	0.009462	0.006290	0.000528
3.2	0.048841	0.074324	0.009898	0.010865	0.000141
3.4	0.074409	0.104613	0.002112	0.001321	0.000251
3.6	0.140659	0.122414	0.007543	0.003028	0.000098
3.8	0.294475	0.135013	0.001849	0.002710	0.000385
4.0	0.548787	0.138082	0.004201	0.008195	0.001009

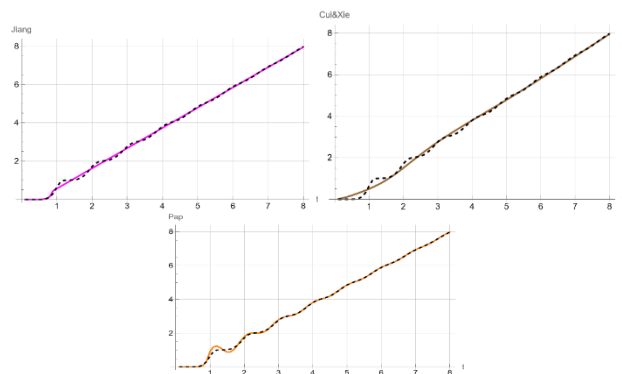
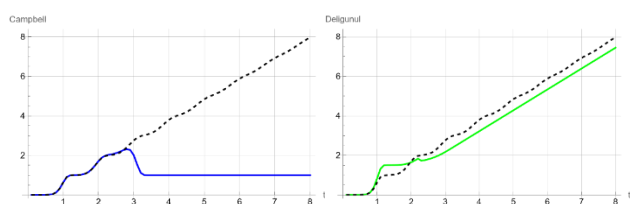
Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, για $\beta = 9$ μάλι η προσέγγιση του Campbell (2018) παρουσιάζει εξαιρετικά αποτελέσματα στο (0,2) αλλά στη συνέχεια παρουσιάζει αρκετά μεγάλη απόκλιση. Επίσης παρατηρούμε ότι οι υπάρχουσες προσεγγίσεις έχουν σε κάποια σημεία καλή εφαρμογή αλλά δεν μπορούν να το επιτύχουν στο μεγαλύτερο μέρος. Τα καλά αποτελέσματα εμφανίζονται αφού η ανανεωτική συνάρτηση τείνει να γίνει ευθεία. Στη συνέχεια θα δούμε ενδεικτικά τι συμβαίνει στους ενδιαμέσους χρόνους. Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση του Jiang (2019) για $t = 3,6$ παρουσιάζει σφάλμα 2.7% των Cui & Xie(2003) 5,4% και η δικιά μας προσέγγιση την ίδια χρονική στιγμή έχει σχετικό σφάλμα 0,15%. Επίσης για $t = 4,4$ η προσέγγιση του Jiang (2019) παρουσιάζει σφάλμα 0.9% των Cui & Xie (2003) 1,74% και η δική μας 0,019%. Στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ IV παρουσιάζονται τα σχετικά σφάλματα των προσεγγίσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΙΑ $\beta = 9$

t	Campbell	Deligunul	Jiang	Cui&Xie	Pap
3.4	0.674019	0.155581	0.010285	0.039931	0.005049
3.6	0.689561	0.130268	0.027692	0.054514	0.001581
3.8	0.714333	0.139338	0.006017	0.027958	0.005025
4.0	0.737178	0.152655	0.018924	0.002131	0.002536
4.2	0.749694	0.140145	0.012783	0.000471	0.001366
4.4	0.757120	0.114358	0.009225	0.017471	0.001966

Τέλος παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των πέντε προσεγγίσεων σε σύγκριση με τις τιμές του Xie (1989).



Διάγραμμα 5. Οι πέντε προσεγγίσεις της Weibull ($a = 1, \beta = 9$) σε σύγκριση με τις τιμές του αλγορίθμου Xie (1989).

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ: Με βάση εμπειρικά αποτελέσματα καταφέραμε να δώσουμε μια νέα προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης της Weibull. Πέτυχαμε την πολύ καλή εφαρμογή σε ενδιαμέσους χρόνους, την ώρα που οι υπόλοιπες προσεγγίσεις δεν ακολουθούν τη μορφή της. Η μέθοδος αυτή επιδέχεται περεταίρω βελτίωσης, κυρίως σε χρόνους $t \leq 1$ και το σκεπτικό της χρήσης σιγμοειδούς συνάρτησης μπορεί να δώσει το έναυσμα για να επιτευχθεί.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή μου Κωνσταντίνο Πολίτη για τη καθοδήγηση και την αμέριστη υποστήριξή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Campbell, A. G. (2018). Simple approximations to the renewal function. https://digitalcommons.unomaha.edu/university_honors_program/18
- Constantine, A. G., & Robinson, N. I. (1997). The Weibull renewal function for moderate to large arguments. *Computational Statistics & Data Analysis*, 24(1), 9–27. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(96\)00052-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-9473(96)00052-7)
- Cui, L., & Xie, M. (2003). Some Normal Approximations for Renewal Function of Large Weibull Shape Parameter. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 32(1), 1–16. <https://doi.org/10.1081/SAC-120013107>
- Deligunul, S. Z. (1985). An Approximate Solution of the Integral Equation of Renewal Theory. *Journal of Applied Probability*, 22, 926. <https://doi.org/10.2307/3213960>
- Jiang, R. (2019). Two approximations of renewal function for any arbitrary lifetime distribution. *Annals of Operations Research*. <https://doi.org/10.1007/s10479-019-03356-2>
- Kao, E. (1997). *An introduction to stochastic processes*. Duxbury Press.
- Losidis, S. & Politis, K. (2022). Bounds for the Renewal Function and Related Quantities. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 24. 10.1007/s11009-022-09953-2.
- Politis, K., & Koutras, M. (2006). Some new bounds for the renewal function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20, 231–250. <https://doi.org/10.1017/S0269964806060141>
- Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models* (12th ed.). Academic Press.
- Xie, M. (1989). On the Solution of Renewal-Type Integral Equations. *Communications in Statistics-Simulation and Computation - COMMUN STATIST-SIMULAT COMPUT*, 18, 281–293. <https://doi.org/10.1080/03610918908812760>
- Yannaros, N. (1994). Weibull renewal processes. In *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (Vol. 46, Issue 4, pp. 641–648). Springer Science and Business Media LLC. <https://doi.org/10.1007/bf00773473>