

Μαθηματικά μοντέλα κρουστών οργάνων και υπολογιστικές προσομοιώσεις

Λιόλιος Κωνσταντίνος
Μεταπτυχιακός Φοιτητής ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
constantinelio@yahoo.gr, std166169@ac.eap.gr

Επιβλέπων καθηγητής: Τσίτσας Νικόλαος
Καθηγητής στο Τμήμα Πληροφορικής
του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Περίληψη – Με την παρούσα εργασία επιχειρείται η κατασκευή γραμμικών μοντέλων προσομοίωσης της λειτουργίας διαφόρων κρουστών οργάνων και η υλοποίησή τους σε υπολογιστή, με σκοπό τόσο τη θεωρητική μελέτη της λειτουργίας τους όσο και την παραγωγή ρεαλιστικού ήχου.

Λέξεις-Κλειδιά: Μοντελοποίηση οργάνων, κρουστά, ήχος, μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών, μαθηματικό μοντέλο

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η μουσική είναι συνυφασμένη με την ιστορία του ανθρώπου, μέχρι σήμερα δεν διαθέτουμε πλήρως ακριβή μοντέλα των μουσικών οργάνων, δηλαδή μοντέλα που να περιγράφουν ακριβώς κάθε πτυχή της λειτουργίας τους. Σε κάποιες κατηγορίες οργάνων είμαστε αρκετά κοντά (π.χ. στα έγχορδα όπου οι εξισώσεις κυμάτων περιγράφουν με ακρίβεια τις ταλαντώσεις των χορδών, σε πνευστά όπου μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά στήλης αέρα ή σε κρουστά με μεμβράνες όπου υπάρχουν μοντέλα υψηλής πιστότητας) ενώ σε άλλα όχι και τόσο, γεγονός που οφείλεται στην υψηλή πολυπλοκότητά τους. Το πρόβλημα της μοντελοποίησης των οργάνων δεν έχει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον αλλά και πρακτική σημασία αφού μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή καλύτερων οργάνων αλλά και σε κατασκευή ψηφιακών / virtual οργάνων σε υπολογιστή, τα οποία μπορούν να μιμηθούν με πιστότητα τον ήχο των αντίστοιχων πραγματικών.

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε κατά την εκπόνηση της εργασίας είχε ως εξής: αρχικά πραγματοποιούνταν μια μελέτη του εκάστοτε οργάνου καθώς και της φυσικής που διέπει τη λειτουργία του. Στη συνέχεια κατασκευάζονταν ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιέγραφε τη λειτουργία αυτή. Έπειτα υλοποιούνταν σε υπολογιστή το μοντέλο και ο παραγόμενος ήχος συγκρινόταν με τον ήχο πραγματικού οργάνου με στόχο να εντοπιστούν οι ελλείψεις του μοντέλου ώστε και να βελτιωθούν.

Ο πυρήνας των μοντέλων περιγράφεται με την παρακάτω εξίσωση:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A(t) a_n e^{-\frac{\pi f_n t}{Q_n}} \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

Εξίσωση 1: Γραμμική εξίσωση μοντέλου

Στην παραπάνω εξίσωση f_n είναι η n -οστή ιδιοσυχνότητα του οργάνου, Q_n ο συντελεστής ποιότητας της αντίστοιχης ιδιοσυχνότητας (Quality factor - αποθηκευμένη ενέργεια / απολεσθείσα ενέργεια ανά κύκλο ταλάντωσης) και a_n το αντίστοιχο αρχικό πλάτος. Συνολικά, η εξίσωση μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: ο όρος $A(t)$ είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα (time-varying

envelope) που σχετίζεται με την αδράνεια του συστήματος (το σύστημα δεν μπαίνει άμεσα σε λειτουργία αλλά χρειάζεται κάποιον χρόνο για αυτό), ο όρος $a_n e^{-\frac{\pi f_n t}{Q_n}}$ εκφράζει την απόσβεση, συνεπώς την απώλεια ενέργειας κάθε ιδιοσυχνότητας και ο $\cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ την αντίστοιχη αρμονική ταλάντωση.

III. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

A. Το μεταλλόφωνο

Αρχικά εξετάστηκε το μεταλλόφωνο. Το μεταλλόφωνο (Glockenspiel) είναι ένα κρουστό όργανο το οποίο αποτελείται από μεταλλικές ράβδους διαφορετικού μήκους τοποθετημένες δίπλα – δίπλα, ακολουθώντας τη διάταξη των πλήκτρων του πιάνου. Παίζεται με μπαγκέτα (ραβδί το οποίο φέρει κεφαλή κατασκευασμένη από διαφορετικά υλικά). Ανήκει στα ιδιόφωνα όργανα, δηλαδή στα όργανα στα οποία η παραγωγή του ήχου οφείλεται στη δόνηση του σώματος του οργάνου καθατού (εν προκειμένου της κάθε μεταλλικής ράβδου). Ο παραγόμενος ήχος εξαρτάται από το υλικό κατασκευής των ράβδων, τις διαστάσεις τους, το υλικό κατασκευής της μπαγκέτας αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αυτή χτυπάει την κάθε ράβδο (θέση, ταχύτητα κτλ.).

Για τη μοντελοποίηση του το μεταλλόφωνο θεωρήθηκε ως δυναμικό σύστημα το οποίο:

- Διεγείρεται με το χτύπημα της μπαγκέτας μέσω της οποίας το σύστημα κερδίζει ενέργεια.
- Ταλαντώνεται σε συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες και εκπέμπει ήχο.
- Σταδιακά χάνει ενέργεια λόγω της εκπομπής του ήχου αλλά και λόγω απωλειών και εν τέλει παύει να ηχεί.

Το χτύπημα της μπαγκέτας μπορεί να θεωρηθεί ως ελαστική κρούση. Η κεφαλή μιας μπαγκέτας με μάζα m χτυπάει μια από τις ράβδους του οργάνου. Όταν βρεθεί σε επαφή με την ράβδο εμφανίζεται δύναμη προς την αντίθετη κατεύθυνση της κίνησής της (παρόμοια με αυτή ενός ελατηρίου). Η αλληλεπίδραση ράβδου – μπαγκέτας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια ελατηρίου δυσκαμψίας (σκληρότητας) k η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η ισοδύναμη δυσκαμψία της ράβδου και της κεφαλής της μπαγκέτας. Όσο διαρκεί η επαφή, η ράβδος συμπιέζεται κατά ποσότητα x . Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο ισοδύναμο σύστημα μάζας-ελατηρίου προκύπτει η εξίσωση:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Εξίσωση 2

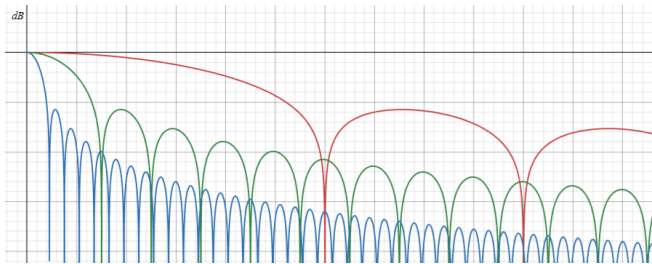
Με αφετηρία την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται κατά τη διάρκεια της

κρούσης και τη φασματική κατανομή αυτής συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας. Καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$F(\omega) = \frac{mv_0 \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\Omega}\right)}{\pi \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}}, \omega \neq \Omega$$

Εξίσωση 3

Στην παραπάνω εξίσωση v_0 είναι η ταχύτητα της μπαγκέτας τη στιγμή της κρούσης, m η μάζα της και $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ η γωνιακή ιδιοσυχνότητα αντίστοιχου συστήματος μάζας – ελατηρίου.



Εικόνα 1

Στην παραπάνω εικόνα μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση σε κλίμακα dB ($20 \log_{10} |F|$) για τρεις τιμές του Ω , όπου $\Omega_{\text{κόκκινο}} > \Omega_{\text{πράσινο}} > \Omega_{\text{μπλε}}$ (που σημαίνει πως $k_{\text{κόκκινο}} > k_{\text{πράσινο}} > k_{\text{μπλε}}$). Παρατηρούμε πως όσο αυξάνει η δυσκαμψία της μπαγκέτας τόσο διευρύνεται το φάσμα των συχνοτήτων που διεγείρονται. Δηλαδή, οι σκληρότερες μπαγκέτες διεγείρουν μεγαλύτερο αριθμό ιδιοσυχνοτήτων του οργάνου πράγμα που σημαίνει πως ο παραγόμενος ήχος είναι πιο «οξύς». Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την εμπειρική παρατήρηση.

Ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων του οργάνου έγινε με τη βοήθεια της δυναμικής εξίσωσης Euler – Bernoulli δοκού, χωρίς φορτίο.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Εξίσωση 4: Εξίσωση Euler – Bernoulli δοκού, χωρίς φορτίο

Στην παραπάνω εξίσωση E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, I η ροπή αδράνειας της διατομής, ρA η γραμμική μάζα της δοκού και $w(x, t)$ η εγκάρσια μετατόπισή της. Με εφαρμογή της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών και των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων:

$$\cosh(\beta) \cos(\beta) = 1 \text{ όπου } \beta = kL$$

Εξίσωση 5: Χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων

Η τελευταία έχει την προφανή λύση $\beta = 0$ η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική ιδιοσυχνότητα και δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Οι υπόλοιπες λύσεις μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική επίλυση της εξίσωσης, από όπου προκύπτει πως $\beta_1 \approx 4.7300, \beta_2 \approx 7.8532, \beta_3 \approx 10.9956 \dots$ Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων της ράβδου. Για κάθε ρίζα β_n ισχύει $\beta_n = k_n L$ από όπου προκύπτει πως:

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Εξίσωση 6: n-οστή γωνιακή ιδιοσυχνότητα

Με δεδομένο πως $\omega = 2\pi f$ προκύπτει πως:

$$f_n = f_1 \frac{\beta_n^2}{\beta_1^2}$$

Εξίσωση 7: Ιδιοσυχνότητα συναρτήσει της θεμελιώδους

Από την τελευταία προκύπτει πως $f_2 \approx 2.7565 f_1, f_3 \approx 5.4039 f_1, f_4 \approx 8.9329 f_1 \dots$ Όπως μπορούμε να δούμε οι ιδιοσυχνότητες μιας ράβδου δεν είναι αρμονικές.

Η απώλεια ενέργειας μιας δονούμενης μπάρας πραγματοποιείται μέσω τεσσάρων βασικών μηχανισμών:

- Εσωτερική απόσβεση. Λόγω τριβών του ίδιου του υλικού της, μέρος της ενέργειάς της μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια (material damping).
- Εκπομπή ήχου. Μέρος της ενέργειας της δόνησης μεταφέρεται από τα ηχητικά κύματα που δημιουργούνται (radiation damping).
- Απώλειες στα σημεία στήριξης. Και εδώ μιλάμε για απώλειες λόγω τριβών. Πολύ σημαντικό ρόλο παίζει η συγκεκριμένη κάθε φορά κατασκευή.
- Τριβή με τον αέρα (aerodynamic damping).

Για το μοντέλο του μεταλλόφωνου μοντελοποιήθηκε μόνο η εσωτερική (ιξώδης) απόσβεση (viscous damping). Ξεκινώντας από την Δ.Ε. ταλάντωσης με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας μπορεί κανείς να καταλήξει στην εξίσωση που περιγράφει την εκθετικά φθίνουσα ταλάντωση του συστήματος.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Εξίσωση 8: ΔΕ ταλάντωσης με ιξώδη απόσβεση

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

Εξίσωση 9: Μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου

Σε αυτό το σημείο έχουν παρουσιαστεί όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την υλοποίηση του μοντέλου, όπως αυτό περιγράφεται από την Εξίσωση 1. Μετά την υλοποίησή του σε υπολογιστή, παρήχθησαν αρχεία ήχου τα οποία συγκρίθηκαν με τον ήχο πραγματικού μεταλλόφωνου. Η αξιολόγηση έγινε τόσο ακουστικά όσο και με τη βοήθεια προγράμματος επεξεργασίας ήχου.

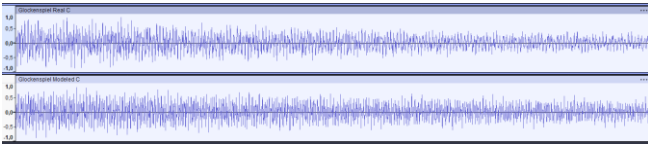
Παρακάτω παρουσιάζονται οι γενική μορφή των κυματομορφών της νότας ντοβ πραγματικού οργάνου (επάνω) και του μοντέλου (κάτω).



Εικόνα 2: Γενικές κυματομορφές πραγματικού - μοντέλου μεταλλόφωνου

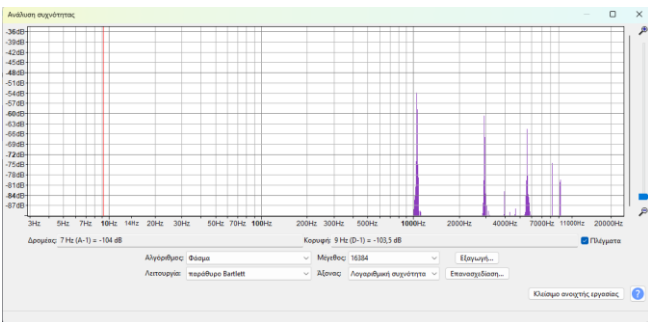
Γενικά οι δύο κυματομορφές παρουσιάζουν ομοιότητες. Το πλάτος και των δύο πέφτει εκθετικά. Στο πραγματικό όργανο η πτώση είναι ταχύτερη, παρόλα αυτά η μορφή τους είναι παρόμοια.

Στην επόμενη εικόνα παρουσιάζεται μια πιο λεπτομερής σύγκριση των δύο κυματομορφών. Και σε αυτήν την περίπτωση η ομοιότητα είναι εμφανής.

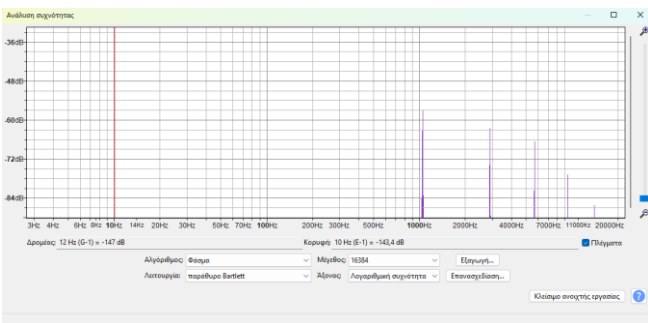


Εικόνα 3: Λεπτομερείς κυματομορφές πραγματικού - μοντέλου μεταλλόφωνου

Με το πρόγραμμα επεξεργασίας ήχου μπορούμε να υπολογίσουμε και το φάσμα των δύο ηχητικών δειγμάτων. Τα δύο φάσματα παρουσιάζονται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 4: Φάσμα ντο πραγματικού μεταλλόφωνου



Εικόνα 5: Φάσμα ντο μοντέλου μεταλλόφωνου

Όπως μπορούμε να δούμε οι κυριότερες συχνότητες (οι ιδιοσυχνότητες όπως αυτές υπολογίστηκαν με την βοήθεια της Εξίσωσης 7) εμφανίζονται και στα δύο φάσματα και με αντίστοιχες εντάσεις. Στο πραγματικό όργανο όμως παρατηρούνται και κάποιες επιπλέον συχνότητες μικρότερης έντασης.

Αν λάβουμε όλα τα παραπάνω υπόψη μπορούμε να πούμε πως το μοντέλο προσεγγίζει αρκετά την πραγματικότητα. Τα βασικά σημεία που το διαφοροποιούν είναι τα εξής:

- Στην ανάλυση για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων θεωρήθηκε πως οι ράβδοι του μεταλλόφωνου αποτελούν ιδανικές δοκούς με τέλεια γεωμετρία. Η παραδοχή αυτή δεν ισχύει στην πράξη. Επιπλέον, οι κατασκευαστές τέτοιων οργάνων χαράσσουν ή τρυπούν τις ράβδους ώστε να βελτιώσουν τον παραγόμενο ήχο. Πρόκειται για μια εμπειρική διαδικασία, η οποία διαφέρει από κατασκευαστή σε κατασκευαστή. Ως αποτέλεσμα, στα πραγματικά όργανα εμφανίζονται περισσότερες συχνότητες από όσες προβλέπει το απλοποιημένο μοντέλο που προτάθηκε.
- Ο ακριβής υπολογισμός της απώλειας ενέργειας είναι κάθε άλλο παρά απλός και εξαρτάται από χαρακτηριστικά του εκάστοτε οργάνου. Ως εκ τούτου, η πραγματική συμπεριφορά διαφέρει αρκετά από την απλοποιημένη εκδοχή του μοντέλου μας.
- Το άκουσμα του οργάνου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από τον τρόπο εκτέλεσής του. Κάθε μπαγκέτα διεγείρει με διαφορετικό τρόπο τις διάφορες ιδιοσυχνότητες του οργάνου, ενώ σημαντικό ρόλο παίζει και το ακριβές σημείο πρόσκρουσης στη ράβδο. Στο προτεινόμενο μοντέλο οι παράμετροι αυτοί δεν λήφθηκαν υπόψη.
- Τέλος ο ήχος του κάθε οργάνου εξαρτάται και από τον χώρο γύρω του. Ο ήχος που φτάνει στον ακροατή δεν είναι μόνο ο ήχος που εκπέμπεται άμεσα από το όργανο αλλά και ο ήχος που ανακλάται στις επιφάνειες του χώρου γύρω του. Αυτό δίνει μια αίσθηση βάθους και έναν άλλο χαρακτήρα στο άκουσμα. Ούτε αυτά λήφθηκαν υπόψη στο μοντέλο μας.

B. Το ξυλόφωνο

Το ξυλόφωνο είναι όργανο παρόμοιο με το μεταλλόφωνο με βασική διαφορά πως οι ράβδοι του κατασκευάζονται από ξύλο και όχι από μέταλλο. Πέραν τούτου παρουσιάζει και δύο επί πλέον σημαντικές διαφορές. Καταρχάς οι ράβδοι του «κουρδίζονται». Όπως ήδη είδαμε, οι ιδιοσυχνότητες δονούμενης ράβδου δεν είναι αρμονικές. Για αισθητικούς λόγους προτιμώνται τουλάχιστον οι 2-3 πρώτες συχνότητες να βρίσκονται κοντά σε ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη αφαίρεση υλικού από τις ράβδους κατά την κατασκευή τους. Επιπλέον στα ξυλόφωνα συνήθως συναντώνται αντηχεία. Πρόκειται για σωλήνες με κλειστό το ένα άκρο, τοποθετημένους κάτω από κάθε ράβδο. Τα αντηχεία δίνουν ένταση στον ήχο, ενώ παράλληλα επηρεάζουν και τη χροιά του οργάνου, καθώς δεν ενισχύουν όλες τις συχνότητες με τον ίδιο τρόπο.

Για το ξυλόφωνο ακολουθήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση όσον αφορά τη διέγερση του συστήματος. Για το αρχικό πλάτος καθεμιάς από τις ιδιοσυχνότητες ισχύει:

$$A_n \propto \int_0^L F(x)\varphi_n(x)dx$$

Εξίσωση 10: Αρχικό πλάτος ιδιοσυχνότητας συναρτήσει της διέγερσης

όπου $F(x)$ είναι η χωρική κατανομή της δύναμης του χτυπήματος της μπαγκέτας κατά μήκος της ράβδου και $\varphi_n(x)$ η ιδιομορφή (mode shape) της n -οστής ιδιοσυχνότητας. Δεδομένου ότι η κεφαλή της μπαγκέτας είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις της ράβδου, μπορούμε να θεωρήσουμε πως $F(x) \approx F_0 \delta(x - x_0)$ όπου x_0 η ακριβής θέση επαφής, οπότε η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στην:

$$A_n \propto \frac{|\sin(n\pi x_0)|}{n^p}$$

Εξίσωση 11: Αρχικό πλάτος ιδιοσυχνότητας συναρτήσει της θέσης κρούσης

Για τη μελέτη του αντηχείου θεωρήθηκε σωλήνας μήκους L με κλειστό το ένα άκρο του. Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων στο εσωτερικό του περιγράφεται από την ακουστική κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Εξίσωση 12: Ακουστική κυματική εξίσωση

όπου p η πίεση του αέρα, $x \in [0, L]$ η θέση κατά μήκος του σωλήνα, t ο χρόνος και $v_0 \approx 343 \text{ m/s}$ (σε κανονικές συνθήκες) η ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Με εφαρμογή της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών και των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών προκύπτει η λύση:

$$p_n(x, t) = P_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \cos(\omega_n t + \varphi),$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

Εξίσωση 13: Λύση ακουστικής κυματικής εξίσωσης για σωλήνα με κλειστό άκρο

Από την τελευταία προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες:

$$f_n = \frac{(2n-1)v_0}{4L}$$

Εξίσωση 14: Ιδιοσυχνότητες αντηχείου με κλειστό άκρο

Για το παραπάνω αποτέλεσμα θεωρήθηκε πως στο $x = L$ ισχύει $p = 0$, δηλαδή ότι η ακουστική πίεση μηδενίζεται στο στόμιο του σωλήνα. Στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς η πίεση δεν μηδενίζεται ακριβώς στο στόμιο του σωλήνα αλλά λίγο έξω από αυτό. Το φαινόμενο περιγράφεται καλύτερα θεωρώντας πως ο σωλήνας έχει λίγο μεγαλύτερο ενεργό μήκος από το πραγματικό, έστω L_{eff} . Είναι δηλαδή: $L_{eff} = L + \Delta f$. Με την βοήθεια της παραπάνω διόρθωσης η Εξίσωση 14 μετασχηματίζεται στην:

$$f_n = \frac{(2n-1)v_0}{4L_{eff}}, n = 1, 2, 3 \dots$$

Εξίσωση 15: Πραγματικές ιδιοσυχνότητες αντηχείου με κλειστό άκρο

Όπως βλέπουμε οι συχνότητες f_n είναι λίγο πιο χαμηλές από αυτές που υπολογίσαμε αρχικά. Για τους σωλήνες που χρησιμοποιούνται στα ξυλόφωνα ισχύει συνήθως η προσεγγιστική σχέση $\Delta L \approx 0.6r$ όπου r η ακτίνα του σωλήνα. Οι κατασκευαστές λαμβάνουν υπόψη την διόρθωση κατά τον σχεδιασμό των αντηχείων.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι απώλειες ενέργειας. Στα αντηχεία οι απώλειες εμφανίζονται με τους ακόλουθους τρόπους:

- Εκπομπή ήχου (sound radiation). Είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός. Τα ηχητικά κύματα που εκπέμπονται μεταφέρουν ενέργεια μακριά από το αντηχείο. Οι απώλειες αυξάνονται με τη συχνότητα.
- Τριβές (friction losses). Κατά την ταλάντωση του αέρα μέσα στον σωλήνα, εμφανίζονται τριβές με τα τοιχώματά του, οι οποίες μετατρέπουν μέρος της κινητικής ενέργειας σε θερμική. Τα τοιχώματα του σωλήνα θερμαίνονται.
- Θέρμανση αέρα (thermal losses). Η συμπίεση του αέρα του αυξάνει τη θερμοκρασία του, ενώ η αποσυμπίεση την κατεβάζει. Μέρος της θερμικής ενέργειας του αέρα μεταφέρεται στα τοιχώματα του σωλήνα.
- Δομικές απώλειες (structural losses). Είναι οι απώλειες που εμφανίζονται στα σημεία στήριξης των αντηχείων πάνω στο όργανο.

Και το ξυλόφωνο μοντελοποιήθηκε με βάση την Εξίσωση 1, κατ' αντιστοιχία με το μεταλλόφωνο. Τα αντηχεία δεν συμπεριλήφθηκαν στο μοντέλο. Οι βασικές διαφορές αφορούσαν τις ιδιοσυχνότητες (όπως αναφέρθηκε, οι τρεις πρώτες «κουρδίστηκαν») καθώς και τα αρχικά πλάτη των ιδιοσυχνοτήτων αφού χρησιμοποιήθηκε διαφορετική μεθοδολογία για τον υπολογισμό τους. Το μοντέλο μετά την υλοποίησή του σε υπολογιστή αξιολογήθηκε όπως και το μοντέλο του μεταλλόφωνου. Και αυτό κρίθηκε σαν μια ικανοποιητική πρώτη προσέγγιση του πραγματικού οργάνου, παρουσιάζοντας παρόμοιους περιορισμούς με εκείνους του προηγούμενου μοντέλου. Να σημειωθεί πως με βάση την Εξίσωση 11 η ακριβής θέση πρόσκρουσης της μπαγκέτας επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο διεγείρονται οι διάφορες ιδιοσυχνότητες της ράβδου. Παρομοίως με βάση την Εξίσωση 3 το υλικό της μπαγκέτας επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο διεγείρονται οι διάφορες ιδιοσυχνότητες. Και τα δύο συμπεράσματα επαληθεύονται πειραματικά.

C. Η μαρίμπα

Και η μαρίμπα ανήκει στην ίδια οικογένεια με το μεταλλόφωνο και το ξυλόφωνο. Τα βασικά χαρακτηριστικά της είναι παρόμοια με εκείνα του ξυλοφώνου, αλλά έχει και ορισμένες διαφορές σε σχέση με αυτό. Αν και οι ράβδοι της είναι κατασκευασμένες από ξύλο, είναι αρκετά μεγαλύτερες από αυτές του ξυλοφώνου. Επίσης τα αντηχεία της είναι μεγαλύτερα και της προσδίδουν ένα πιο ζεστό και πλούσιο ηχόχρωμα.

Ο συντονισμός Helmholtz στην ακουστική (πήρε το όνομά του από τον Γερμανό φυσικό Hermann von Helmholtz), είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ο αέρας στο εσωτερικό μιας κοιλότητας ταλαντώνεται σε συγκεκριμένη συχνότητα όταν διεγερθεί κατάλληλα. Για παράδειγμα αν κανείς φυσήξει στο στόμιο ενός μπουκαλιού θα ακούσει ήχο κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας και όχι λευκό θόρυβο. Αυτό συμβαίνει επειδή ο αέρας εντός της κοιλότητας συμπεριφέρεται σαν ένα ελατήριο ενώ ο αέρας στο στόμιο ως μάζα. Κατά συνέπεια, το σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί ως

ταλαντωτής μάζας – ελατηρίου. Η συχνότητα της ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο του Helmholtz:

$$f_H = \frac{v_s}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L_{eff}V}}$$

Εξίσωση 16: Συχνότητα συντονισμού αντηχείου Helmholtz

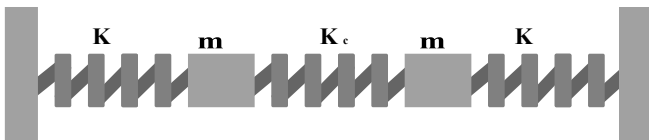
Η βασική διαφορά σε σχέση με το αντηχείο της προηγούμενης παραγράφου είναι ότι το αντηχείο Helmholtz εμφανίζει μια και μοναδική συχνότητα συντονισμού αντί για μια σειρά ιδιοσυχνοτήτων. Οι απώλειες στα αντηχεία Helmholtz εμφανίζονται με τους ίδιους μηχανισμούς όπως και στα αντηχεία σωλήνα. Αν συγκεντρώσουμε όλες τις απώλειες σε έναν συντελεστή απόσβεσης α , τότε προκύπτει:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_H^2 x = 0$$

Εξίσωση 17: Εξίσωση αντηχείου Helmholtz με απόσβεση

Τα αντηχεία της μαρίμπας εμφανίζουν χαρακτηριστικά τόσο των αντηχείων σωλήνα όσο και των αντηχείων Helmholtz. Συγκεκριμένα στους μακρύτερους σωλήνες κυριαρχούν τα χαρακτηριστικά των αντηχείων σωλήνα (χαμηλές νότες) ενώ στους πιο κοντούς σωλήνες κυριαρχούν τα χαρακτηριστικά των αντηχείων Helmholtz (μεσαίες και ψηλές νότες). Σε κάθε περίπτωση τα αντηχεία της μαρίμπας είναι φτιαγμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ενισχύουν κυρίως τη θεμελιώδη συχνότητα κάθε νότας και όχι να παράγουν πλούσιες αρμονικές σειρές.

Έστω πως έχουμε δύο ίδιες μάζες (m), η καθεμιά από τις οποίες είναι συνδεδεμένη με έναν τοίχο μέσω ελατηρίου σταθεράς K , ενώ μεταξύ τους συνδέονται με ελατήριο σταθεράς K_c , όπως παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 6: Σύστημα μαζών-ελατηρίων

Αν θεωρήσουμε πως οι μάζες εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας τους και επιλύσουμε το σύστημα ως προς τις ιδιοσυχνότητες του, τότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των δύο ιδιοσυχνοτήτων:

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2k_c}{k}}$$

Εξίσωση 18: Σχέση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων συζευγμένου συστήματος

Στη μαρίμπα μπορούμε να πούμε πως το σύστημα ράβδου–αντηχείου είναι ένα ασθενώς συζευγμένο σύστημα. Οι πρωτεύοντες ταλαντωτές είναι οι ράβδοι, οι οποίες δονούνται εξαιτίας της μεταφοράς ενέργειας από το χτύπημα της μπαγκέτας. Οι ταλαντώσεις τους διεγείρουν τον αέρα στα αντηχεία όπου εμφανίζονται δευτερεύουσες ταλαντώσεις, οι οποίες ανατροφοδοτούν (πολύ ασθενώς) την ταλάντωση των ράβδων.

Και για το μοντέλο της μαρίμπας ακολουθήθηκε η Εξίσωση 1. Επιπλέον όμως προστέθηκε ένας όρος ο οποίος

περιγράφει τη συνεισφορά του αντηχείου κάθε νότας, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$R(t) = A(t)a_0 e^{-\frac{\pi f_0 t}{Q}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Εξίσωση 19: Όρος συνεισφοράς αντηχείου

Η υλοποίηση και η αποτίμηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκαν κατά τρόπο ανάλογο με εκείνον των προηγούμενων οργάνων. Και σε αυτή την περίπτωση επιτεύχθηκε μια ικανοποιητική προσέγγιση του φάσματος της πραγματικής μαρίμπας. Παρ' όλα αυτά στο φάσμα της πραγματικής μαρίμπας παρατηρήθηκαν και συχνότητες χαμηλότερες της θεμελιώδους. Οι συχνότητες αυτές προφανώς και δεν προκύπτουν από τη δόνηση των ράβδων, κάτι τέτοιο δεν θα ήταν δυνατό σύμφωνα και με την έως τώρα ανάλυση. Οι χαμηλές αυτές συχνότητες είναι πιθανόν να προέλθουν από άλλες πηγές, όπως η δόνηση του σκελετού του οργάνου, η κίνηση του αέρα στα αντηχεία ή ο θόρυβος που προέρχεται από το χτύπημα της μπαγκέτας. Επιπλέον είναι δυνατόν να σχετίζονται με τη διαδικασία της ηχογράφησης, για παράδειγμα λόγω της δόνησης του ίδιου του μικροφώνου ή της βάσης στήριξής του, λόγω σύζευξης με το δάπεδο και τους τοίχους, ή λόγω φαινομένων εγγύτητας.

D. Το βιμπράφωνο

Το βιμπράφωνο ανήκει επίσης στην ίδια οικογένεια με τα όργανα που εξετάστηκαν ήδη. Οι ράβδοι του είναι μεταλλικές όπως και στο μεταλλόφωνο, αλλά συνήθως είναι κατασκευασμένες από αλουμίνιο. Επιπλέον, διαθέτει αντηχεία για κάθε νότα, παρόμοια με αυτά της μαρίμπας. Το χαρακτηριστικό που το διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα όργανα της οικογένειας είναι η ύπαρξη ενός ηλεκτροκίνητου μηχανισμού στο άνω μέρος κάθε αντηχείου. Ο μηχανισμός αυτός μπορεί να ανοιγοκλείνει το αντηχείο με αποτέλεσμα να αυξομειώνεται η ένταση του ήχου, δημιουργώντας ένα είδος βιμπράτου, από όπου προέρχεται και η ονομασία του.

Και οι ράβδοι του βιμπράφωνου «κουρδίζονται» για λόγους αισθητικής. Έχει διαπιστωθεί πειραματικά πως οι ιδιοσυχνότητες έχουν συνήθως τιμές ίσες με 3, 6, 9, 14, και 20 φορές τη θεμελιώδη συχνότητα. Το «κούρδισμα» επιτυγχάνεται με αφαίρεση ή και προσθήκη υλικού σε κάθε ράβδο.

Ο μηχανισμός δημιουργίας του βιμπράτου διαμορφώνει το πλάτος και όχι τη συχνότητα, όπως συμβαίνει με το βιμπράτο στα περισσότερα όργανα. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι τα αντηχεία δεν κλείνουν ποτέ πλήρως κατά τη λειτουργία του μηχανισμού. Η διαδικασία μοντελοποιήθηκε σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$y_m(t) = y(t)(1 + m \sin(\omega_v t))$$

Εξίσωση 20: Εξίσωση περιγραφής του βιμπράτου

Στην παραπάνω εξίσωση, $y(t)$ είναι το αρχικό ηχητικό σήμα, m ο δείκτης διαμόρφωσης (*modulation index*) και ω_v η γωνιακή συχνότητα του μηχανισμού βιμπράτου. Η συχνότητα αυτή κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 3 και 7 Hz.

Και σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο κρίθηκε ικανοποιητικό όσον αφορά τα γενικά χαρακτηριστικά του οργάνου, χωρίς ωστόσο να αποδίδει με ακρίβεια τις λεπτομέρειες του παραγόμενου ήχου.

E. Το πιάνο

Έχοντας τη γνώση από τη μοντελοποίηση των προηγούμενων οργάνων, επιχειρήθηκε και η μοντελοποίηση του πιάνου, ενός οργάνου αρκετά διαφορετικού και πολυπλοκότερου από τα όργανα που έχουν ήδη εξεταστεί.

Το πιάνο είναι ένα από τα πιο δημοφιλή όργανα της δυτικής μουσικής. Αποτελείται από ένα ξύλινο σώμα, το οποίο περιλαμβάνει το αντηχείο και στηρίζεται σε ξύλινα πόδια. Στη μία πλευρά του βρίσκεται ένα σύνολο ασπρόμαυρων πλήκτρων. Όταν ο πιανίστας πιέσει κάποιο πλήκτρο, ένας σύνθετος μηχανισμός μεταδίδει την κίνηση σε ένα μικρό σφυράκι, το οποίο χτυπά την αντίστοιχη χορδή, η οποία αρχίζει να πάλλεται και δημιουργεί τον ήχο ο οποίος ενισχύεται από το αντηχείο. Έχει μία χορδή για κάθε πλήκτρο στη μπάσα περιοχή, δύο χορδές ανά πλήκτρο στη μεσαία και τρεις ανά πλήκτρο στην υψηλή. Όταν ο εκτελεστής αφήσει το πλήκτρο, τότε η χορδή μπλοκάρεται και ο ήχος σταματάει. Το πιάνο λοιπόν ανήκει στα κρουστά – πληκτροφόρα όργανα. Έχει μεγάλες εκφραστικές δυνατότητες και είναι πολυφωνικό όργανο. Αυτό που το διαφοροποίησε από τα αντίστοιχα όργανα που προϋπήρχαν (π.χ. το τσέμπαλο) ήταν η δυνατότητά του να παίζει και χαμηλά (piano) και δυνατά (forte) από όπου πήρε και το όνομά του. Μεγάλο μέρος της δυτικής μουσικής των περασμένων αιώνων έχει γραφτεί με τη βοήθεια ενός πιάνου. Δεν είναι μόνιμο όργανο της συμφωνικής ορχήστρας αλλά συμμετέχει συχνά σε αυτή σαν σολιστικό όργανο.

Για τη μοντελοποίηση της χορδής, ξεκινάμε από την κυματική εξίσωση σε μια διάσταση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Εξίσωση 21: Κυματική εξίσωση σε μια διάσταση

όπου $y = y(x, t)$ η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής και $v_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, με T η τάση της χορδής και μ η γραμμική πυκνότητά της. Με εφαρμογή της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών, καταλήγουμε στη σχέση:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Εξίσωση 22: Λύση της κυματικής εξίσωσης σε μια διάσταση

όπου $\omega_n = \frac{n\pi v_s}{L}$.

Τα παραπάνω ισχύουν για μια ιδεατή χορδή, όχι όμως και για μια πραγματική χορδή, όπου εμφανίζονται φαινόμενα απόσβεσης και δυσκαμψίας που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη μοντελοποίηση. Η κυματική εξίσωση λοιπόν για μια πραγματική χορδή διαφοροποιείται και είναι της μορφής:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} = v_s^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Εξίσωση 23: Κυματική εξίσωση σε πραγματική χορδή

όπου α είναι ο συντελεστής απόσβεσης και κ η παράμετρος που εκφράζει τη δυσκαμψία της χορδής. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τις ιδιοσυχνότητες της χορδής:

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + B n^2}$$

Εξίσωση 24: n -οστή συχνότητα συναρτήσει της θεμελιώδους

όπου f_0 είναι η θεμελιώδης συχνότητα, f_n η n -οστή ιδιοσυχνότητα, n ο αριθμός της αρμονικής ($n \geq 1$) και B συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της χορδής, όπως η τάση, το μήκος, η διάμετρος και η δυσκαμψία. Όπως φαίνεται και από την παραπάνω σχέση, οι ιδιοσυχνότητες πραγματικής χορδής δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας, αλλά εμφανίζουν ελαφρώς υψηλότερες τιμές. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως inharmonicity.

Στις χορδές του πιάνου δεν εμφανίζονται μόνο εγκάρσια κύματα αλλά και διαμήκη. Καθώς το σφυράκι χτυπάει μια χορδή αυτή επιμηκύνεται ελάχιστα το οποίο όμως είναι αρκετό για να δημιουργήσει τα διαμήκη κύματα. Τα κύματα αυτά έχουν υψηλότερες συχνότητες από ό,τι τα εγκάρσια, τυπικά ανάμεσα στα 1250Hz – 50KHz και δίνουν χαρακτήρα ιδιαίτερα στις μπάσες χορδές.

Το αντηχείο του πιάνου είναι μια ξύλινη πλάκα η οποία βρίσκεται κάτω από τις χορδές στα πιάνα με ουρά (ή πίσω στα κάθετα). Καθώς οι χορδές πάλλονται οι ταλαντώσεις μεταδίδονται μέσω της γέφυρας στο αντηχείο το οποίο πάλλεται με τη σειρά του. Το αντηχείο λόγω της μεγάλης επιφάνειάς του πιέζει πολύ μεγαλύτερη ποσότητα αέρα, με αποτέλεσμα ο ήχος να ενισχύεται. Μέσω του αντηχείου όμως αλλάζει και η χροιά του οργάνου καθώς εξ' αιτίας της κατασκευής ορισμένες συχνότητες ενισχύονται περισσότερο από άλλες, ενώ ορισμένες καταστέλλονται.

Με βάση τα παραπάνω, το μοντέλο του πιάνου σχεδιάστηκε ως εξής:

- Επιλέγεται το πλήθος των χορδών αναλόγως της νότας που πατήθηκε (1 / 2 ή 3 χορδές)
- Υπολογίζεται η θεμελιώδης συχνότητα. Με βάση αυτήν υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες λαμβάνοντας υπόψη το φαινόμενο της inharmonicity.
- Υπολογίζονται τα αρχικά πλάτη για κάθε μια από τις ιδιοσυχνότητες.
- Θεωρώντας ότι αυτές φθίνουν εκθετικά, υπολογίζεται η χρονική σταθερά τ_n για κάθε μία από αυτές.
- Επαναλαμβάνονται οι ίδιοι υπολογισμοί (συχνότητες, πλάτη, σταθερές) για τα διαμήκη κύματα που εμφανίζονται στις χορδές.
- Τα επιμέρους σήματα αθροίζονται για όλες τις συχνότητες.
- Για την προσομοίωση του αντηχείου εφαρμόζονται ζωνοπερατά φίλτρα στο τελικό σήμα.

Με τη χρήση του μοντέλου αναπαράχθηκε ο ήχος του πιάνου. Το αποτέλεσμα δεν ήταν αρκετά ρεαλιστικό, γεγονός που ήταν αναμενόμενο, ιδιαίτερα στις ψηλές νότες όπου το

άκουσμα είχε έντονα συνθετικό χαρακτήρα. Οι κυματομορφές παρουσίασαν κάποιες ομοιότητες αλλά και αυτές με τη σειρά τους διέφεραν αρκετά σε σχέση με αυτές του πραγματικού οργάνου. Τέλος, από τη σύγκριση των φασμάτων διαπιστώθηκε πως οι συχνοτικές συνιστώσες που εμφανίστηκαν στο πραγματικό όργανο ήταν πολλές περισσότερες, ιδιαίτερα στη χαμηλή περιοχή του φάσματος. Επιγραμματικά το μοντελοποιημένο πιάνο απείχε αρκετά, όσον αφορά τον ήχο, από το πραγματικό. Η βασική αιτία για το αποτέλεσμα αυτό ήταν πως αν και τα φαινόμενα που μελετήθηκαν περιγράφουν ορισμένες πτυχές της λειτουργίας του πιάνου, δεν είναι αρκετά για να δώσουν την πλήρη εικόνα. Ακολουθήθηκε μια στατική – γραμμική προσέγγιση, κάτι που δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Δηλαδή, μοντελοποιήθηκαν μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά του οργάνου, αλλά δεν επιτεύχθηκε ακριβής μοντελοποίηση της λειτουργίας του.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η προσέγγιση, έστω και επιφανειακά, της μοντελοποίησης κάποιων μουσικών οργάνων, μέσω της μελέτης των βασικών φυσικών φαινομένων που διέπουν τη λειτουργία τους. Πρόκειται για μια κάθε άλλο παρά απλή διαδικασία αφού ακόμα και στα απλούστερα όργανα οι φυσικές διεργασίες που οδηγούν στην παραγωγή του ήχου είναι πολυάριθμες και συχνά ιδιαίτερος πολύπλοκες.

Γενικά τα φαινόμενα που διέπουν τη λειτουργία των οργάνων είναι κατά βάση:

- Μη γραμμικά. Οι εξισώσεις λειτουργίας των οργάνων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, βασίζονται σε αθροίσματα πεπερασμένου πλήθους ημιτονικών όρων και αποτελούν γραμμικές προσεγγίσεις της πραγματικής συμπεριφοράς τους.
- Συζευγμένα συστήματα. Για παράδειγμα, η ταλάντωση μιας ράβδου ή μιας χορδής, καθώς και η ταλάντωση του αντίστοιχου αντηχείου, αποτελούν ένα συζευγμένο σύστημα όπου το ένα μέρος επηρεάζει το άλλο. Κατά συνέπεια πρέπει να τα προσεγγίσει κανείς ως ένα ενιαίο σύστημα και όχι ξεχωριστά.
- Πολυπαραμετρικά. Έχουν δηλαδή μεγάλο αριθμό παραμέτρων που επηρεάζουν τη λειτουργία τους. Για παράδειγμα, για τη μοντελοποίηση του χτυπήματος μιας μπαγκέτας απαιτείται ο συνυπολογισμός της μάζας της, της ταχύτητάς της, του σχήματός της, του υλικού κατασκευής της, του σημείου πρόσκρουσης στο όργανο, του υλικού κατασκευής του οργάνου κτλ.
- Χαοτικά. Ορισμένα μουσικά όργανα μπορούν να εμφανίσουν χαοτική συμπεριφορά υπό ορισμένες συνθήκες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα χάλκινα πνευστά, τα οποία είναι δυνατόν να παρουσιάσουν χαοτικές ταλαντώσεις.
- Έχουν φαινόμενα διαφορετικών χρονικών κλιμάκων. Ορισμένα φαινόμενα εξελίσσονται σε σύντομο χρονικό διάστημα (για παράδειγμα, το χτύπημα της μπαγκέτας διαρκεί λίγα ms) ενώ κάποια άλλα σε

μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες (π.χ. η ταλάντωση της ράβδου μπορεί να διαρκέσει πολλά δευτερόλεπτα). Τα φαινόμενα αυτά συχνά πρέπει να μελετώνται χωριστά.

- Εμφανίζουν απώλειες. Δηλαδή δεν είναι τα ιδανικά – χωρίς απώλειες συστήματα που μελετώνται συνήθως.

Επιπλέον, για την ρεαλιστική παραγωγή ήχου από ένα μοντέλο μουσικού οργάνου, απαιτείται η κατά το δυνατόν πληρέστερη μοντελοποίησή του. Ο ρεαλισμός δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί λαμβάνοντας υπόψη μόνο ορισμένα βασικά φαινόμενα που αφορούν τη λειτουργία του.

Τέλος, εκτός από τη σωστή περιγραφή των φυσικών φαινομένων, για την πραγματοποίηση των υπολογισμών χρειάζονται και ακριβή αριθμητικά δεδομένα. Για παράδειγμα, είναι απαραίτητες οι ακριβείς τιμές των σταθερών που σχετίζονται με τα υλικά που χρησιμοποιεί το όργανο (π.χ. δυσκαμψία του συγκεκριμένου υλικού). Παράλληλα, οι ίδιοι οι υπολογισμοί είναι συχνά ιδιαίτερα σύνθετοι και δεν επιδέχονται πάντοτε αναλυτικές λύσεις.

Αν και η μοντελοποίηση της λειτουργίας των μουσικών οργάνων είναι ιδιαίτερα δύσκολη, παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον, όχι μόνο για την επίλυση του θεωρητικού προβλήματος αλλά και για τις πρακτικές εφαρμογές της. Η χρήση του υπολογιστή στη μελέτη, τη διδασκαλία αλλά και την παραγωγή της μουσικής στις μέρες μας θεωρείται αυτονόητη. Η φυσική μοντελοποίηση των οργάνων κερδίζει συνεχώς έδαφος σε σχέση με πιο παραδοσιακές τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιούν ηχογραφημένο υλικό. Υπάρχει, λοιπόν, σημαντικό πεδίο εφαρμογής της φυσικής μοντελοποίησης των μουσικών οργάνων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Δ. Γ. Φούσκας, «Ψηφιακές επικοινωνίες I,» σε *Ψηφιακές επικοινωνίες I*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, p. 226.
- [2] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, «The Physics of Musical Instruments,» 1988, p. 756.
- [3] «Euphonics,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://euphonics.org/homepage/>.
- [4] Έ. Αβέρωφ, Εισαγωγή στην οργανογνωσία, Αθήνα: Φίλιππος Νάκας, 1992.
- [5] Σ. Τραχανάς, Μερικές διαφορικές εξισώσεις, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2018.
- [6] Νικόλαος Δ. Αλικάκος, Γεώργιος Δ. Ακρίβης, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική, 2017.
- [7] C. Roads, The computer music tutorial, The MIT Press, p. 1234.
- [8] Harvey E. White, Donald H. White, Physics And Music - The science of musical sound, Dover books on physics, 2014, p. 432.
- [9] Δ. Αθανασιάδης, Ιστορία της μουσικής, Θεσσαλονίκη: Μακεδονικό ωδείο, 2000.