

Μαθηματικές Προσεγγίσεις στη Σύνθεση και Ανάλυση Μουσικής: Η Περίπτωση του Ιάννη Ξενάκη

Νικόλαος Βασιούλας
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στα Μαθηματικά
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Αθήνα, Ελλάδα

Αλέξανδρος Δασκαλάκης
Επιβλέπων Καθηγητής
Μέλος ΣΕΠ, Ελληνικό Ανοικτό
Πανεπιστήμιο

Περίληψη- Η εργασία αυτή παρουσιάζει συνοπτικά τα βασικά αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας που εκπονήθηκε στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στα Μαθηματικά του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και εξετάζει τη σχέση μαθηματικών και μουσικής μέσα από το έργο του Ιάννη Ξενάκη. Η αφετηρία της μελέτης βρίσκεται στη μακρόχρονη σύνδεση των δύο πεδίων, από τις αριθμητικές αναλογίες των Πυθαγορείων και τις πρώτες θεωρίες της αρμονίας έως τις αυστηρά οργανωμένες τεχνικές της σειραϊκής μουσικής του 20ού αιώνα.

Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές μαθηματικές έννοιες που αξιοποίησε ο Ξενάκης στη συνθετική του σκέψη, όπως η θεωρία πιθανοτήτων, οι στοχαστικές διαδικασίες, οι κατανομές Poisson, Κανονική (Gauss) και Maxwell-Boltzmann, οι αλυσίδες Markov, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία ομάδων και η θεωρία συνόλων. Η θεωρητική αυτή προσέγγιση συνδέεται με την ανάλυση χαρακτηριστικών έργων του συνθέτη, μεταξύ των οποίων τα *Metastaseis*, *Pithoprakta*, *Achorripsis*, *ST-10-1, 080262*, *Duel*, *Nomos Alpha* και *Herma*.

Η μελέτη δείχνει ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο ανάλυσης του μουσικού φαινομένου, αλλά μπορούν να λειτουργήσουν ως ουσιαστικός μηχανισμός παραγωγής μουσικής μορφής. Μέσα από το έργο του Ξενάκη αναδεικνύεται ένας ιδιαίτερος τρόπος σύνθεσης, στον οποίο η μαθηματική σκέψη, η καλλιτεχνική δημιουργία και η επιστημονική αναζήτηση συνυπάρχουν και αλληλοσυμπληρώνονται. Η εργασία επιχειρεί να συγκεντρώσει αυτές τις διαφορετικές όψεις σε ένα ενιαίο θεωρητικό πλαίσιο και να συμβάλει στην κατανόηση ενός πεδίου που εξακολουθεί να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη σύγχρονη μουσικολογία και την υπολογιστική μουσική έρευνα.

Λέξεις Κλειδιά- Θεωρία πιθανοτήτων, στοχαστικές διαδικασίες, κατανομή Poisson, Gauss, Maxwell-Boltzmann, αλυσίδες Markov, τυχαίοι περίπατοι, θεωρία παιγνίων, θεωρία ομάδων, Άλγεβρα Boole, θεωρία κοσκίνων, Ιάννης Ξενάκης, μαθηματική μοντελοποίηση, computational musicology.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και τη μουσική αποτελεί μία από τις πιο διαχρονικές εκφράσεις της ανθρώπινης αναζήτησης για τάξη, δομή και κατανόηση του κόσμου. Από την αρχαιότητα έως σήμερα, οι δύο αυτοί τομείς αναπτύχθηκαν παράλληλα, συχνά επηρεάζοντας ο ένας τον άλλο. Οι αριθμητικές αναλογίες των Πυθαγορείων, οι κοσμολογικές θεωρήσεις του Πλάτωνα και του Kepler, αλλά και η αυστηρή οργάνωση που συναντάται σε μεγάλο

μέρος της δυτικής μουσικής παράδοσης, μαρτυρούν ότι η αναζήτηση μαθηματικής τάξης στον ήχο δεν αποτελεί σύγχρονο φαινόμενο.

Κατά τον 20ό αιώνα, η σχέση αυτή απέκτησε νέα δυναμική. Η ανάπτυξη της σειραϊκής μουσικής και η γενικότερη τάση για συστηματική οργάνωση όλων των παραμέτρων της σύνθεσης οδήγησαν πολλούς δημιουργούς στην αναζήτηση νέων θεωρητικών εργαλείων. Μέσα σε αυτό το περιβάλλον εμφανίζεται ο Ιάννης Ξενάκης, ο οποίος ακολούθησε μια διαφορετική πορεία. Αντί να οργανώσει τη μουσική μέσα από αυστηρές σειρές και προκαθορισμένες σχέσεις, στράφηκε σε έννοιες που προέρχονταν από τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, αναζητώντας τρόπους να περιγράψει μουσικά φαινόμενα μεγάλης κλίμακας, παρόμοια με εκείνα που παρατηρούνται στη φύση.

Η ιδιαιτερότητα της προσέγγισής του δεν βρίσκεται μόνο στη χρήση μαθηματικών εργαλείων, αλλά κυρίως στον τρόπο με τον οποίο αυτά ενσωματώνονται στη συνθετική διαδικασία. Στο έργο του, τα μαθηματικά δεν εμφανίζονται ως εξωτερικό θεωρητικό σχήμα ούτε ως μεταγενέστερη ερμηνεία του μουσικού αποτελέσματος. Αντίθετα, αποτελούν συχνά το σημείο εκκίνησης της ίδιας της δημιουργικής διαδικασίας και καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται και εξελίσσεται η μουσική μορφή.

Το παρόν άρθρο βασίζεται στα αποτελέσματα διπλωματικής εργασίας που εκπονήθηκε στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στα Μαθηματικά του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου το 2025. Σκοπός του είναι να παρουσιάσει συνοπτικά τις βασικές πτυχές αυτής της έρευνας και να αναδείξει γιατί το έργο του Ξενάκη εξακολουθεί να αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα δημιουργικής συνάντησης ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη και τη μουσική τέχνη. Παράλληλα, επιδιώκεται να αναδειχθεί η διαχρονική σημασία αυτής της συνάντησης σε μια εποχή όπου οι αλγοριθμικές μέθοδοι, η υπολογιστική μουσική και τα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης επαναφέρουν με νέο τρόπο το ερώτημα της σχέσης ανάμεσα στη δημιουργικότητα και τη μαθηματική περιγραφή.

II. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το δεύτερο κεφάλαιο της διπλωματικής εξετάζει αναλυτικά τα μαθηματικά εργαλεία που αξιοποιεί ο Ξενάκης. Κάθε εργαλείο παρουσιάζεται με τη μαθηματική του θεμελίωση, παραδείγματα εφαρμογής και σύνδεση με συγκεκριμένα έργα.

A. Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες

Η θεωρία πιθανοτήτων αποτελεί τη θεμελιώδη βάση της στοχαστικής σύνθεσης. Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας, όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος, \mathcal{F} μία σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και P ένα μέτρο πιθανότητας. Τα βασικά αξιώματα του Kolmogorov είναι:

$$P(A) \geq 0, \quad P(\Omega) = 1. \quad (1)$$

Για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων $\{A_i\}$ ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (2)$$

Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X , η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση ορίζονται ως:

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i). \quad (3)$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (4)$$

Για τον Ξενάκη, η ελεγχόμενη τυχαιότητα αποτελεί βασική συνθετική αρχή, καθώς ο συνθέτης καθορίζει τους στατιστικούς νόμους που διέπουν το μουσικό υλικό και η παρτιτούρα προκύπτει ως μία συγκεκριμένη υλοποίηση των νόμων αυτών.

B. Κατανομές Poisson, Gauss και Maxwell–Boltzmann

Τρεις κατανομές κατέχουν κεντρικό ρόλο στη συνθετική πρακτική του Ξενάκη.

Η κατανομή Poisson περιγράφει τον αριθμό k γεγονότων ανά μονάδα χρόνου ή ανά δομικό κελί, για παράμετρο $\lambda > 0$:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Ισχύει:

$$E[X] = \text{Var}(X) = \lambda.$$

Στο *Achorripsis*, ο Ξενάκης επιλέγει a priori μέση πυκνότητα $A = 0.6$ γεγονότα ανά μονάδα στη σύγχρονη πιθανοθεωρητική σημειογραφία αυτό αντιστοιχεί στον ρυθμό $\lambda = 0.6$ της κατανομής Poisson.

Η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται από μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Μικρή τιμή της σ αντιστοιχεί σε στενή διασπορά, ενώ μεγάλη τιμή σε ευρύτερη κατανομή παραμέτρων.

Η κατανομή Maxwell–Boltzmann περιγράφει την κατανομή ταχυτήτων σωματιδίων σε ιδανικό αέριο:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad v \geq 0. \quad (7)$$

όπου m είναι η μάζα, T η θερμοκρασία και k_B η σταθερά Boltzmann. Χαρακτηριστικές ταχύτητες είναι:

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad v_{avg} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}, \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (8)$$

Στο *Pithoprakta*, ο Ξενάκης αντλεί έμπνευση από τη στατιστική μηχανική και ειδικότερα από την κατανομή Maxwell–Boltzmann. Το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου μετασχηματίζεται σε συνθετικό εργαλείο οργάνωσης των glissandi των εγχόρδων. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται σύνθετες ηχητικές μάζες, των οποίων η συνοχή προκύπτει από στατιστικές ιδιότητες και όχι από παραδοσιακές μελωδικές ή αρμονικές σχέσεις.

C. Αλυσίδες Markov και Τυχαίοι Περίπατοι

Μια αλυσίδα Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, \dots) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}. \quad (9)$$

Ο πίνακας μετάβασης $P = (p_{ij})$ ικανοποιεί:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1.$$

Η στάσιμη κατανομή π ικανοποιεί:

$$\pi P = \pi, \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

Ο τυχαίος περίπατος αποτελεί περίπτωση ειδικής αλυσίδας Markov με:

$$X_{n+1} = X_n + \xi_n.$$

Στη συμμετρική περίπτωση ισχύει:

$$E[X_n] = 0, \quad \text{Var}(X_n) = n. \quad (10)$$

Η ιδιότητα αυτή συνδέεται με την αυξανόμενη διάχυση μιας στοχαστικής τροχιάς, η οποία μπορεί να ερμηνευθεί μουσικά ως σταδιακή επέκταση της περιοχής ύψους ή της ηχητικής πυκνότητας.

D. Θεωρία Παιγνίων

Ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος ορίζεται ως τριάδα:

$$G = (N, \{A_i\}, \{u_i\}),$$

όπου $N = \{1, 2\}$, A_i είναι το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i και u_i η συνάρτηση χρησιμότητας. Ισχύει:

$$u_1 + u_2 = 0.$$

Μικτή στρατηγική $\sigma_i \in \Delta(A_i)$ είναι η κατανομή πιθανότητας επί του A_i . Το θεώρημα minimax δίνει πως:

$$v^* = \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} E[u_1(\sigma_1, \sigma_2)] = \min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} E[u_1(\sigma_1, \sigma_2)]. \quad (11)$$

Στο *Duel*, δύο μαέστροι επιλέγουν σε πραγματικό χρόνο μουσικές τακτικές βάσει ενός πίνακα αποδόσεων μηδενικού αθροίσματος.

E. Θεωρία Ομάδων και Λογικές Πράξεις επί Συνόλων

Η θεωρία ομάδων παρέχει το εργαλείο για τη μοντελοποίηση συμμετριών και μετασχηματισμών. Στο *Nomos Alpha*, η ομάδα περιστροφών του κύβου, ισόμορφη με την S_4 , χρησιμοποιείται για τη διάταξη ηχητικών κατηγοριών και τη διαμόρφωση της μακροδομής.

Στο *Herma*, ο Ξενάκης εργάζεται με λογικές πράξεις επί των συνόλων, τις οποίες ο ίδιος συνδέει με τη συμβολική μουσική και τη γενική άλγεβρα. Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, οι πράξεις αυτές είναι ισοδύναμες με πράξεις Άλγεβρας Boole. Αν \mathcal{R} είναι το σύνολο των διαθέσιμων φθόγγων και $A, B, C \subset \mathcal{R}$, τότε μία ενδεικτική λογική σχέση γράφεται:

$$F = (A \cup B) \cap (C \cup \neg A) \quad (12)$$

Κάθε λογική πράξη, όπως ένωση, τομή και συμπλήρωμα, αντιστοιχεί σε διακριτή διαδικασία οργάνωσης του μουσικού υλικού.

F. Θεωρία Κοσκίνων

Η θεωρία κοσκίνων βασίζεται στην αριθμητική υπολοίπων. Ένα κόσκινο με μέτρο m και κλάση υπολοίπου r ορίζεται ως:

$$S(m, r) = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv r \pmod{m}\}. \quad (13)$$

Σύνθετα κόσκινα προκύπτουν με λογικές πράξεις όπως ένωση, τομή και συμπλήρωμα:

$$S(m_1, r_1) \cup S(m_2, r_2), \quad S(m_1, r_1) \cap S(m_2, r_2).$$

Στη σκέψη του Ξενάκη, τα κόσκινα λειτουργούν ως αριθμητικά φίλτρα επιλογής μουσικών ύψων, ανεξάρτητα από τις συμβάσεις της τονικής μουσικής.

III. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΕΡΓΩΝ

Η ανάλυση των έργων του Ιάννη Ξενάκη αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας έρευνας, καθώς μέσα από αυτά αναδεικνύεται με σαφήνεια ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικές θεωρίες μετασχηματίζονται σε εργαλεία μουσικής σύνθεσης. Τα έργα που εξετάζονται δεν αντιμετωπίζονται απλώς ως μουσικά αντικείμενα, αλλά ως σύνθετα μαθηματικά και ηχητικά συστήματα, στα οποία έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων, τη στατιστική μηχανική, τη θεωρία παιγνίων, τη θεωρία ομάδων και τη λογική συνόλων αποκτούν άμεση συνθετική λειτουργία. Η επιλογή των συγκεκριμένων έργων βασίζεται τόσο στη σημασία τους για την εξέλιξη της συνθετικής σκέψης του Ξενάκη όσο και στην αντιπροσωπευτικότητά τους ως προς τα διαφορετικά μαθηματικά μοντέλα που αξιοποίησε κατά τη διάρκεια της δημιουργικής του πορείας.

A. *Pithoprakta* (1955–56)

Το *Pithoprakta* αποτελεί ένα από τα πρώτα και σημαντικότερα παραδείγματα εφαρμογής εννοιών της στατιστικής μηχανικής στη μουσική σύνθεση. Το έργο είναι γραμμένο για 46 έγχορδα και 2 κρουστά, ενώ κάθε έγχορδο αντιμετωπίζεται ως σχετικά ανεξάρτητη ηχητική οντότητα. Αντί να οργανώνει το μουσικό υλικό μέσω παραδοσιακών μελωδικών ή αρμονικών σχέσεων, ο Ξενάκης βασίζεται

σε στατιστικούς νόμους που περιγράφουν τη συλλογική συμπεριφορά μεγάλου αριθμού στοιχείων.

Η οργάνωση των *glissandi* αντλεί έμπνευση από την κατανομή Maxwell–Boltzmann, η οποία χρησιμοποιείται στη φυσική για την περιγραφή της κατανομής των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου. Αν και δεν πρόκειται για κυριολεκτική φυσική προσομοίωση, το μαθηματικό πρότυπο της κατανομής μεταφέρεται στον μουσικό χώρο, δημιουργώντας ένα σύνθετο ηχητικό νέφος. Η ενότητα του έργου δεν προκύπτει από τη γραμμική ανάπτυξη μελωδιών, αλλά από τη στατιστική συνοχή που εμφανίζεται στο επίπεδο της συνολικής υφής.

B. *Achorripsis* (1956–57)

Στο *Achorripsis*, ο Ξενάκης εφαρμόζει με συστηματικό τρόπο τη θεωρία πιθανοτήτων και ειδικότερα την κατανομή Poisson. Η δομή του έργου οργανώνεται σε πίνακα 7×28 , ο οποίος αντιστοιχεί σε επτά ομάδες οργάνων και είκοσι οκτώ διαδοχικές χρονικές φάσεις. Κάθε κελί του πίνακα μπορεί να περιέχει συγκεκριμένο αριθμό μουσικών γεγονότων, ο οποίος καθορίζεται μέσω πιθανοκρατικής διαδικασίας.

Η επιλογή μέσης πυκνότητας $A = 0.6$ γεγονότα ανά μονάδα, που αντιστοιχεί στη σύγχρονη παράμετρο $\lambda = 0.6$ της κατανομής Poisson, οδηγεί σε υψηλή πιθανότητα εμφάνισης κενών κελιών. Ως αποτέλεσμα, η μουσική υφή χαρακτηρίζεται από αραιότητα και ασυνέχεια, στοιχεία που αποτελούν βασικό χαρακτηριστικό του έργου. Το *Achorripsis* αποτελεί ίσως το πιο καθαρό παράδειγμα εφαρμογής πιθανοκρατικού μοντέλου στη συνθετική πρακτική του Ξενάκη.

C. *ST-10-1,080262* (1962)

Το *ST-10-1,080262* ανήκει στη σειρά έργων που δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή και αποτελεί σημαντικό σταθμό στην ιστορία της αλγοριθμικής μουσικής. Για τη σύνθεσή του χρησιμοποιήθηκε ο υπολογιστής IBM 7090 του Institut Blaise Pascal στο Παρίσι, ενώ οι σχετικοί αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν σε γλώσσα Fortran.

Οι παράμετροι των μουσικών γεγονότων, όπως ο χρόνος έναρξης, η διάρκεια, το ύψος, η δυναμική και η ενορχήστρωση, παράγονται μέσω στοχαστικών αλγορίθμων που υλοποιήθηκαν σε γλώσσα Fortran. Με τον τρόπο αυτό, ο υπολογιστής δεν λειτουργεί ως απλό μέσο καταγραφής, αλλά ως ενεργό εργαλείο σύνθεσης. Το έργο αποτελεί ένα από τα πρώτα παραδείγματα χρήσης ηλεκτρονικού υπολογιστή στη μουσική σύνθεση. Μέσα από τη χρήση στοχαστικών αλγορίθμων, οι θεωρητικές ιδέες που είχε ήδη διατυπώσει ο Ξενάκης μετατρέπονται σε πρακτικές συνθετικές διαδικασίες, ανοίγοντας τον δρόμο για μεταγενέστερες μορφές αλγοριθμικής και υπολογιστικής μουσικής δημιουργίας.

D. *Duel* (1959)

Το *Duel* αποτελεί μία από τις πιο πρωτότυπες εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στη μουσική. Το έργο βασίζεται στην αλληλεπίδραση δύο μαέστρων, οι οποίοι καλούνται να λαμβάνουν αποφάσεις κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης σύμφωνα με έναν προκαθορισμένο πίνακα αποδόσεων.

Η δομή του έργου προσεγγίζει ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, στο οποίο οι επιλογές του ενός συμμετέχοντα επηρεάζουν άμεσα τις δυνατότητες του άλλου. Κατά συνέπεια, η τελική μορφή του έργου δεν είναι απόλυτα προκαθορισμένη, αλλά αναδύεται μέσα από τη στρατηγική αλληλεπίδραση των εκτελεστών. Το *Duel* διευρύνει σημαντικά την έννοια της μουσικής σύνθεσης, εισάγοντας στοιχεία αβεβαιότητας, επιλογής και δυναμικής λήψης αποφάσεων.

E. *Nomos Alpha* (1966)

Το *Nomos Alpha*, έργο για σόλο βιολοντσέλο, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας ομάδων στη μουσική σύνθεση. Ο Ξενάκης αξιοποιεί δομές συμμετρίας που σχετίζονται με την ομάδα στροφών του κύβου, η οποία είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_4 .

Οι μετασχηματισμοί της ομάδας χρησιμοποιούνται ως μηχανισμός οργάνωσης των μουσικών γεγονότων και συμβάλλουν στη διαμόρφωση της συνολικής μορφής του έργου. Η χρήση της θεωρίας ομάδων επιτρέπει τη δημιουργία πολύπλοκων σχέσεων συμμετρίας και μετασχηματισμού, οι οποίες δύσκολα θα μπορούσαν να επιτευχθούν με παραδοσιακές συνθετικές τεχνικές.

F. *Herma* (1961)

Στο *Herma*, ο Ξενάκης στρέφεται προς τη συμβολική λογική και τη θεωρία συνόλων. Το έργο βασίζεται σε τρία βασικά σύνολα φθόγγων, τα οποία συμβολίζονται ως *A*, *B* και *C*. Μέσα από πράξεις όπως η ένωση, η τομή και το συμπλήρωμα, τα σύνολα αυτά συνδυάζονται σε ολοένα και πιο σύνθετες λογικές εκφράσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται σε μουσικές δομές.

Η μακροδομή του έργου προκύπτει από τη διαδοχή αυτών των λογικών μετασχηματισμών, ενώ η ιδιαίτερα απαιτητική πιανιστική γραφή δημιουργεί μια πυκνή και ενεργητική ηχητική επιφάνεια. Το *Herma* θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα συμβολικής μουσικής και αποτυπώνει με σαφήνεια την προσπάθεια του Ξενάκη να μεταφέρει αφηρημένες μαθηματικές και λογικές δομές στο πεδίο της μουσικής πράξης.

G. *Metastasis* (1953–54)

Το *Metastasis* αποτελεί έργο-ορόσημο στην πρώιμη δημιουργική πορεία του Ξενάκη. Το έργο συνδέεται συχνά στη βιβλιογραφία με τη σταδιακή απομάκρυνση του συνθέτη από τις κυρίαρχες σειραϊκές πρακτικές της μεταπολεμικής πρωτοπορίας και με τη διαμόρφωση μιας προσωπικής συνθετικής γλώσσας βασισμένης σε γεωμετρικές και μαζικές ηχητικές δομές. Η οργάνωση του έργου βασίζεται σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις του μουσικού χώρου, όπου οι συνεχείς μεταβολές ύψους αποδίδονται μέσω εκτεταμένων glissandi.

Οι χαρακτηριστικές γραμμές των εγχόρδων μπορούν να αναπαρασταθούν ως καμπύλες στο επίπεδο χρόνου-ύψους, δημιουργώντας ένα πυκνό πλέγμα τροχιών. Η γεωμετρική αυτή σκέψη συνδέεται άμεσα με την αρχιτεκτονική δραστηριότητα του συνθέτη και ιδιαίτερα με τις επιφάνειες

Πίνακας I
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ ΣΕ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΞΕΝΑΚΗ

Έργο	Έτος	Μαθηματική προσέγγιση	Συνθετική λειτουργία
<i>Pithoprakta</i>	1955-56	Κατανομή Maxwell–Boltzmann	Οργάνωση ηχητικών μαζών και glissandi εγχόρδων
<i>Achorripsis</i>	1956-57	Κατανομή Poisson	Στοχαστικός έλεγχος της πυκνότητας των μουσικών γεγονότων
<i>ST/10–1,080262</i>	1962	Στοχαστικοί αλγόριθμοι	Υπολογιστική παραγωγή μουσικών παραμέτρων
<i>Duel</i>	1959	Θεωρία παιγνίων	Στρατηγική αλληλεπίδραση δύο μαέστρων κατά την εκτέλεση
<i>Nomos Alpha</i>	1966	Θεωρία ομάδων και συμμετρίες κύβου	Έλεγχος της μακροδομής μέσω συμμετριών και μετασχηματισμών
<i>Herma</i>	1961	Θεωρία συνόλων και λογικές πράξεις	Μετασχηματισμός λογικών σχέσεων σε μουσική μορφή
<i>Metastasis</i>	1953-54	Γεωμετρική αναπαρασταση χρόνου-ύψους	Οργάνωση συνεχών μεταβολών και τροχιών glissandi

διπλής καμπυλότητας (ruled surfaces) που χρησιμοποιήσε αργότερα στον σχεδιασμό του Philips Pavilion για την Παγκόσμια Έκθεση των Βρυξελλών το 1958.

Μέσα από το *Metastasis*, η γεωμετρία δεν λειτουργεί απλώς ως αναλογικό σχήμα, αλλά ως βασικός μηχανισμός οργάνωσης του ηχητικού υλικού, προαναγγέλλοντας πολλές από τις μεταγενέστερες μαθηματικές και χωρικές προσεγγίσεις του Ξενάκη.

Ο Πίνακας I συνοψίζει τα βασικά μαθηματικά μοντέλα που παρουσιάζονται στα έργα που εξετάστηκαν καθώς και τη συνθετική λειτουργία που επιτελούν σε κάθε περίπτωση.

IV. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει σε ενιαίο πλαίσιο τις κυριότερες μαθηματικές προσεγγίσεις που συναντώνται στο έργο του Ιάννη Ξενάκη. Ενώ η σχετική βιβλιογραφία εξετάζει συχνά επιμέρους πτυχές της συνθετικής του σκέψης, η μελέτη αυτή συγκεντρώνει και συσχετίζει διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία, όπως η θεωρία πιθανοτήτων, οι στοχαστικές διαδικασίες, οι κατανομές Poisson και Maxwell–Boltzmann, οι αλυσίδες Markov, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία ομάδων και η λογική συνόλων, αναδεικνύοντας τον ρόλο τους στη διαμόρφωση συγκεκριμένων συνθετικών πρακτικών.

Παράλληλα, η εργασία προσεγγίζει τα έργα του Ξενάκη από μαθηματική σκοπιά, δίνοντας έμφαση στη θεωρητική θεμελίωση των μοντέλων που χρησιμοποιούνται και στη σύνδεσή τους με το τελικό μουσικό αποτέλεσμα. Μέσα από αυτή την προσέγγιση αναδεικνύεται η ιδιαίτερη συμβολή του Ξενάκη στη διαμόρφωση μιας συνθετικής σκέψης που συνδυάζει τη μαθηματική αυστηρότητα με την καλλιτεχνική δημιουργία και προαναγγέλλει πολλές από τις μεταγενέστερες εξελίξεις της αλγοριθμικής σύνθεσης και της υπολογιστικής μουσικολογίας.

V. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

Η ανάλυση των έργων που εξετάστηκαν επιβεβαιώνει ότι τα μαθηματικά αποτελούν θεμελιώδες στοιχείο της συνθετικής σκέψης του Ιάννη Ξενάκη. Οι μαθηματικές θεωρίες που αξιοποιεί δεν λειτουργούν ως εξωτερικά εργαλεία περιγραφής του μουσικού αποτελέσματος, αλλά ενσωματώνονται στον ίδιο τον μηχανισμό παραγωγής του. Από τα στοχαστικά μοντέλα του *Pithoprakta* και του *Achorripsis* έως τις λογικές δομές του *Herma*, τις συμμετρίες του *Nomos Alpha* και τις αλγοριθμικές διαδικασίες του *ST-10-1,080262*, παρατηρείται μια συστηματική προσπάθεια μετασχηματισμού αφηρημένων μαθηματικών εννοιών σε συνθετικές πρακτικές.

Παράλληλα, η έρευνα αναδεικνύει τη διαρκή αλληλεπίδραση ανάμεσα στην τάξη και την τυχαιότητα, ένα χαρακτηριστικό που διαπερνά μεγάλο μέρος του έργου του συνθέτη. Η ισορροπία αυτή επιτρέπει τη δημιουργία σύνθετων μουσικών μορφών οι οποίες δεν προκύπτουν ούτε από αυστηρά ντετερμινιστικές ούτε από πλήρως τυχαίες διαδικασίες. Μέσα από αυτή την προσέγγιση, ο Ξενάκης διαμόρφωσε ένα συνθετικό πλαίσιο που επηρέασε σημαντικά την εξέλιξη της αλγοριθμικής σύνθεσης, της υπολογιστικής μουσικολογίας και της χρήσης υπολογιστικών μεθόδων στη μουσική δημιουργία.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αναδεικνύουν επίσης μια σειρά ερευνητικών κατευθύνσεων που παραμένουν ανοικτές. Η περαιτέρω μελέτη στοχαστικών μοντέλων, όπως οι μη ομογενείς αλυσίδες Markov και τα κρυφά μοντέλα Markov, θα μπορούσε να προσφέρει νέα εργαλεία για τη μουσική ανάλυση και σύνθεση. Αντίστοιχα, η θεωρία κοσκίνων του Ξενάκη παραμένει ένα ιδιαίτερα γόνιμο πεδίο για σύγχρονες υπολογιστικές εφαρμογές. Επιπλέον, η αξιοποίηση εργαλείων φασματικής ανάλυσης, τοπολογικών μεθόδων και θεωρίας πολύπλοκων δικτύων ενδέχεται να συμβάλει στην περαιτέρω κατανόηση της μουσικής δομής. Τέλος, η συγκριτική μελέτη των μαθηματικών μεθόδων του Ξενάκη με σύγχρονα συστήματα μηχανικής μάθησης και τεχνητής νοημοσύνης αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πεδίο για μελλοντική έρευνα.

VI. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το έργο του Ιάννη Ξενάκη αποτελεί μία από τις πλέον ολοκληρωμένες και τεκμηριωμένες περιπτώσεις δημιουργικής συνάντησης των μαθηματικών με τη μουσική κατά τον 20ό αιώνα. Η παρούσα μελέτη έδειξε ότι οι μαθηματικές θεωρίες που αξιοποίησε δεν περιορίζονται σε περιγραφικό ή οργανωτικό ρόλο, αλλά ενσωματώνονται στον πυρήνα της συνθετικής διαδικασίας και συμβάλλουν ουσιαστικά στη διαμόρφωση της μουσικής μορφής.

Η εξέταση των βασικών μαθηματικών εργαλείων και η εφαρμογή τους σε χαρακτηριστικά έργα του συνθέτη ανέδειξαν τον τρόπο με τον οποίο έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων, τις στοχαστικές διαδικασίες, τη θεωρία παιγνίων, τη θεωρία ομάδων και τη λογική συνόλων μπορούν να μετασχηματιστούν σε λειτουργικούς μηχανισμούς μουσικής δημιουργίας. Μέσα από το έργο του Ξενάκη καθίσταται σαφές ότι η μαθηματική σκέψη και η καλλιτεχνική

έκφραση δεν αποτελούν ανταγωνιστικά πεδία, αλλά μπορούν να συνυπάρξουν δημιουργικά, παράγοντας νέες μορφές αισθητικής οργάνωσης και κατανόησης του μουσικού φαινομένου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] I. Xenakis, *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition*, rev. ed., S. Kanach, Trans. Stuyvesant, NY: Pendragon Press, 1992.
- [2] J. A. Harley, *Xenakis: His Life in Music*. New York: Routledge, 2004.
- [3] B. A. Varga, *Conversations with Iannis Xenakis*. London: Faber and Faber, 1996.
- [4] R. A. Wannamaker, "Structure and perception in Herma by Iannis Xenakis," *Music Theory Online*, vol. 7, no. 3, 2001. [Online]. Available: <https://mtosmt.org/issues/mto.01.7.3/mto.01.7.3.wannamaker.html>
- [5] M. Solomos, *Ιάννης Ξενάκης: Το σύμπαν ενός ιδιώτηπου δημιουργού*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2006.
- [6] D. Exarchos, "Iannis Xenakis and sieve theory: An analysis of the late music (1984–1993)," Ph.D. dissertation, Goldsmiths College, Univ. of London, 2007.
- [7] J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson, Eds., *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
- [8] A. Childs, "Achorripsis: A sonification of probability distributions," *Contemporary Music Review*, vol. 21, no. 2–3, pp. 75–90, 2002.
- [9] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 13th ed. Amsterdam: Academic Press, 2024.
- [10] G. Mazzola, *The Topos of Music*. Basel: Birkhäuser, 2002.